Das elektromagnetische Feld in trichterförmigen Wellenleitungen verschiedener Form und Wandimpedanz und das Strahlungsverhalten entsprechender Hornstrahler

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der Abteilung für Elektrotechnik
der Ruhr-Universität Bochum

von

Volkert Hansen

Esgrusschauby

Bochum 1975

Das elektromagnetische Feld in trichterförmigen Wellenleitungen verschiedener Form und Wandimpedanz und das Strahlungsverhalten entsprechender Hornstrahler

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der Abteilung für Elektrotechnik
der Ruhr-Universität Bochum

von

Volkert Hansen

Esgrusschauby

Bochum 1975

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dissertation eingereicht am: 28.5.1975
Tag der mündlichen Prüfung: 9.7.1975
Referent: Prof. Dr. H. Severin
Korreferent: Prof. Dr. P. Wenzel

Inhaltsverzeichnis

		Seite
1. Einleitung		1
2. Mathematische Methode		3
2.1	Berechnung der Fernfeldrichtcharakteristik von Hornstrahlern mit Hilfe der Aperturfeldmethode	3
2.2	Ausbreitung von Wellen in unendlich langen trichterförmigen Wellenleitungen	5
2.2.1	Die mathematische Beschreibung der untersuchten Hornstrahler	5
2.2.2	Die Gleichungen für die Feldkomponenten	8
2.2.3	Die Randbedingungen	11
2.2.3.1	Wellenleitungen mit vollkommen leitenden Wänden	11
2.2.3.2	Kugelsektorförmige Wellenleitungen mit von Null verschiedener Wandimpedanz	12
2.2.4	Anwendung des Differenzenverfahrens zur Lösung des Randwertproblems	16
3. Hornstrahler mit vollkommen leitenden Wänden		19
3.1	Rechenprogramm zur Berechnung des Feldes in der Apertur	19
3.2	Diskussion der Genauigkeit der Ergebnisse. Das Kegelhorn	24
3.3	Berechnung von Hornstrahlern mit verschiedenen Berandungsformen	28
3.3.1	Pyramidenhorn	28
3.3.2	Hornstrahler für Zirkularpolarisation	42

Seite

4. Kugelsektorhörner mit von Null verschiedener Wandimpedanz 51

4.1 Bedingungen für die Anwendbarkeit des Produktansatzes $f_1(\vartheta)f_2(\varphi)g(r)$ 51

4.1.1 E- und H-Wellen verkoppelt 51

4.1.2 E- und H-Wellen entkoppelt 57

4.2 Rechenprogramm zur Berechnung der Felder in der Apertur 59

4.3 Diskussion der Genauigkeit der Ergebnisse 60

4.4 Kugelsektorhörner mit bestimmten Wandimpedanzen 66

4.4.1 Kugelsektorhorn mit hohem Flächenwirkungsgrad für Zirkularpolarisation, Wände mit Riefen in Ausbreitungsrichtung 66

4.4.2 Kugelsektorhörner mit transversalen Riefen in den Wänden 78

5. Experimenteller Teil 84

5.1 Meßverfahren 84

5.1.1 Messung des Feldes in der Apertur 84

5.1.2 Messung der Richtcharakteristik 89

5.2 Meßergebnisse 89

5.2.1 Pyramidenhorn mit vollkommen leitenden Wänden 89

5.2.2 Kugelsektorhorn mit zwei isotropen induktiven Wänden 95

6. Zusammenfassung 114

7. Anhang 116

7.1 Realisierung von ebenen Wänden bestimmter Impedanz 116

		Seite
7.1.1	Isotroper Fall	116
7.1.2	Anisotroper Fall	119
7.2	Verzeichnis häufig verwendeter Formelzeichen	122
7.3	Literaturangaben	124

1. Einleitung

Unter dem Begriff Hornstrahler faßt man eine Klasse von Mikrowellenantennen zusammen, bei denen die Bündelung der Strahlungsenergie - analog zu akustischen Strahlern - mit Hilfe eines horn- oder trichterförmigen Gebildes erfolgt. Die grundlegenden Formen bestehen aus endlich langen Stücken von Hohlleitungen, deren Querschnitt sich stetig erweitert. Diese Hohlleitungen werden im folgenden trichterförmige Wellenleitungen genannt.

In der Mikrowellentechnik finden Hornstrahler Verwendung vor allem als Primärstrahler zur Erregung von Linsen und Spiegeln und als Strahlungselemente von elektronisch gesteuerten Antennen. Um ein Antennensystem mit vorgegebenen Strahlungseigenschaften realisieren zu können, müssen deshalb oft Hornstrahler entwickelt werden, deren Richtdiagramme spezielle Forderungen erfüllen.

Eine exakte Analyse des Strahlungsverhaltens von Hornstrahlern, die die Lösung eines sehr komplizierten Randwertproblems erfordert, ist bisher nicht durchführbar. Man kann jedoch eine in vielen Fällen in der Genauigkeit ausreichende Berechnung des Strahlungsfeldes nach der Aperturfeldmethode durchführen, bei der man in der Apertur von der Feldverteilung in der entsprechenden unendlich langen trichterförmigen Wellenleitung ausgeht. Ausführlich untersucht wurde bisher die Ausbreitung von Wellen in solchen trichterförmigen Wellenleitugen, bei denen die Felder eines Wellentyps in Produktform darstellbar sind. Diese Darstellungsform ist immer dann möglich, wenn die unendlich gut leitend angenommenen Berandungsflächen Koordinatenflächen eines Koordinatensystems sind, in denen die Wellengleichung separierbar ist, und wenn die Materialverteilung in der Wellenleitung homogen ist. Die technisch wichtigsten Fälle, die diese Bedingungen erfüllen, sind die H- und E-Sektorhörner, deren rechteckiger Querschnitt sich nur in der H- oder E-Ebene zur Öffnung hin linear erweitert, sowie das Kegelhorn und das Kugelsektorhorn.

Wenn die Materialverteilung in einer solchen Wellenleitung

inhomogen ist oder die Hohlleitungswände eine von Null verschiedene Oberflächenimpedanz besitzen, kann der Produktansatz zu einer genäherten Feldverteilung führen und zu Ergebnissen, die in einigen Fällen für den Entwurf derartiger Strahler nützlich sein können. Das für die Praxis wichtigste Beispiel, das zu dieser Gruppe von Hornstrahlern gehört, ist das Kegelhorn mit beliebiger Oberflächenimpedanz des Mantels.

Von der großen Zahl der mit Hilfe des Produktansatzes nicht berechenbaren Hornstrahler werden in der vorliegenden Arbeit zwei Gruppen untersucht: nämlich

a) Hornstrahler mit unendlich gut leitenden Berandungsflächen, die nicht Koordinatenflächen eines Koordinatensystems zu sein brauchen, in dem die Wellengleichung separierbar ist (z.B. das Pyramidenhorn),

b) Kugelsektorhörner mit Wänden bestimmter Oberflächenimpedanz.

Als Speiseleitungen werden für Hornstrahler üblicherweise Hohlleitungen verwendet, in denen nur die Hauptwelle ausbreitungsfähig ist. Im Trichter können neben der Hauptwelle auch Wellentypen höherer Ordnung angeregt werden. Bei genügend langsamer Erweiterung des Querschnitts und bei Wahrung der Symmetrie des Trichters können die Amplituden dieser Wellentypen klein gegen die Amplitude der Hauptwelle gehalten werden. Daher und wegen der mathematischen Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Amplituden der höheren Wellentypen wird die Berechnung des Strahlungsfeldes im allgemeinen unter der Annahme durchgeführt, daß nur die Hauptwelle angeregt ist. Die Ermittlung ihres Feldes in der jeweils zugehörigen unendlich langen Wellenleitung verlangt die Lösung des Eigenwertproblems, die mit Hilfe des Differenzenverfahrens erfolgt.

Durch die Messung des elektrischen Feldes in der Öffnung und durch den Vergleich mit der Rechnung wird an je einem Hornstrahler der Gruppen a) und b) geprüft, wie gut es gelingt, nur die Hauptwelle anzuregen. Der Vergleich von gemessenen und errechneten Richtdiagrammen soll zeigen, in welchem Maße höhere Wellentypen in der Öffnung und Ströme auf der Außenwand des Hornstrahlers dessen Strahlungsverhalten beeinflussen.

2. Mathematische Methode

2.1 Berechnung der Fernfeldrichtcharakteristik von Hornstrahlern mit Hilfe der Aperturfeldmethode

Die Grundlage der Berechnung der Strahlungseigenschaften von Flächenantennen nach der Aperturfeldmethode bildet die Gleichung (siehe z.B. [1])

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi}\left[\operatorname{rot}\oint_F\left(\vec{n}\times\vec{E}(Q)\right)\frac{e^{-jkr_{PQ}}}{r_{PQ}}\,dF + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{j\omega\varepsilon_o\varepsilon_r}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\oint_F\left(\vec{n}\times\vec{H}(Q)\right)\frac{e^{-jkr_{PQ}}}{r_{PQ}}\,dF\right], \tag{2.1}$$

mit

$$k = \omega\sqrt{\mu_o\mu_r\varepsilon_o\varepsilon_r} = \frac{2\pi}{\lambda}\,. \tag{2.2}$$

In der Gleichung bedeuten

F	eine geschlossene Fläche,
$\vec{n}$	die nach außen gerichtete Flächennormale von F,
Q	die Integrationspunkte auf F,
P	den Aufpunkt,
r_{PQ}	den Abstand von P und Q,
ω	die Kreisfrequenz,
λ	die Wellenlänge,
$\varepsilon_o\varepsilon_r$	die absolute Dielektrizitätskonstante und
$\mu_o\mu_r$	die absolute Permeabilität des Raumes, der das von F eingeschlossene Volumen umgibt.

Dabei ist davon ausgegangen, daß die Zeitabhängigkeit des Vorganges durch $e^{j\omega t}$ beschrieben wird.

Mit Gl. (2.1) kann man aus den tangentialen Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ auf einer beliebigen geschlossenen Fläche F das elektromagnetische Feld in jedem Punkt P außerhalb des von F eingeschlossenen Volumens exakt berechnen. Bei der Anwendung von Gl. (2.1) auf konkrete Probleme ergibt sich jedoch die Schwierigkeit, daß es im allgemeinen nicht möglich ist, $\vec{E}_{tan}$ und $\vec{H}_{tan}$ auf einer geschlossenen Fläche exakt anzugeben. Im Falle des Hornstrahlers legt man die Hüllfläche so, daß sie mit der Aperturfläche F_A und der Außenwand zusammenfällt und macht nach Kirchhoff in erster Näherung folgende Annahmen:

1) In der Aperturfläche F_A ist die Feldverteilung dieselbe wie in der entsprechenden unendlich langen trichterförmigen Wellenleitung.

2) Auf der Außenseite der Hornwand sind wegen der Verwendung eines Materials hoher elektrischer Leitfähigkeit die tangentialen elektrischen Feldkomponenten gleich Null. Da das Feld auf der Außenseite mit wachsendem Abstand von der Öffnung sehr stark abklingt, werden dort auch die tangentialen magnetischen Feldkomponenten gleich Null gesetzt.

Mit diesen Näherungswerten für die tangentialen Feldkomponenten auf der Hüllfläche F kann man $\vec{E}(P)$ mit Hilfe von Gl. (2.1) näherungsweise berechnen, wobei sich die Integration nur über die Aperturfläche F_A des Hornstrahlers erstreckt. Da die Berechnung der Feldkomponenten für die entsprechende unendlich lange trichterförmige Wellenleitung in Kugelkoordinaten (r,ϑ,φ) erfolgt, wählt man zweckmäßigerweise als Aperturfläche den Ausschnitt aus der der Hornöffnung zugeordneten Kugelfläche. Wenn der Abstand r_{PQ} des Aufpunktes P mit den Koordinaten $(r_P,\vartheta_P,\varphi_P)$ von der Hornöffnung sehr groß gegen die Linearabmessungen der Antenne ist, läßt sich Gl. (2.1) vereinfachen in (siehe z.B. [2])

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_\infty(\vartheta_P,\varphi_P)\,\frac{e^{-jkr_P}}{r_P} \qquad (2.3)$$

wobei

$$\vec{E}_\infty(\vartheta_P,\varphi_P) = -\frac{jk}{4\pi}\left\{\vec{u}_P \times \int_{F_A} \vec{n} \times \vec{E}(Q)\, e^{-jk(r_{PQ}-r_P)}\, dF\right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\mu_o\mu_r}{\varepsilon_o\varepsilon_r}}\, \vec{u}_P \times \left(\vec{u}_P \times \int_{F_A} \vec{n} \times H(Q)\, e^{-jk(r_{PQ}-r_P)}\, dF\right)\right\} \qquad (2.4)$$

die "Richtcharakteristik" der Antenne wiedergibt. In Gln. (2.3) und (2.4) sind r_P der Abstand des Aufpunktes P vom Koordinatenursprung und $\vec{u}_P$ der zugehörige Einheitsvektor (Bild 2.1).

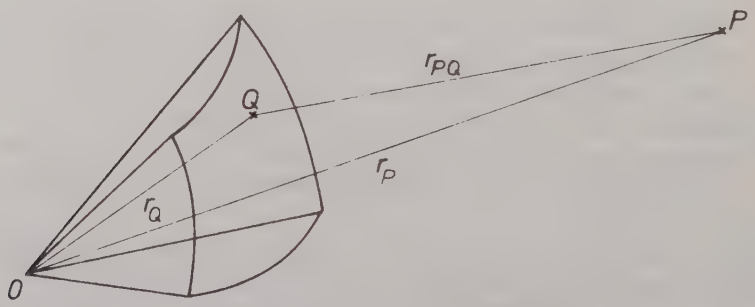


Bild 2.1

2.2 Ausbreitung von Wellen in unendlich langen trichterförmigen Wellenleitungen

2.2.1 Die mathematische Beschreibung der untersuchten Hornstrahler

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die Untersuchung von trichterförmigen Wellenleitungen, deren Berandungsflächen man sich dadurch entstanden denken kann, daß ein an seinem Anfangspunkt festgehaltener Strahl sich längs einer geschlossenen Kurve

bewegt. Die Gleichung der Berandungsfläche läßt sich dann in der Form

$$S(\varphi_R, \vartheta_R) = 0 \tag{2.5}$$

schreiben. Im Bild 2.2, das die Lage der Wellenleitung im kartesischen und sphärischen Koordinatensystem zeigt, ist ein Punkt R auf der Berandungsfläche durch die Koordinaten r_R, ϑ_R und φ_R gekennzeichnet.

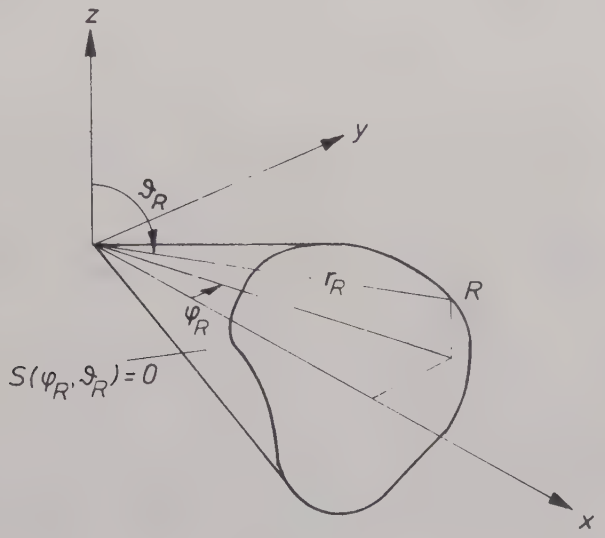


Bild 2.2

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die Untersuchung von Hornstrahlern mit zwei aufeinander senkrecht stehenden Symmetrieebenen. Zur mathematischen Charakterisierung dieser Symmetrieeigenschaften ist es zweckmäßig, anstelle von ϑ den Winkel

$$\vartheta^* = \vartheta - \frac{\pi}{2}$$

einzuführen, der also von der Ebene $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (z = 0) aus gemessen wird (s. Bild 2.3).

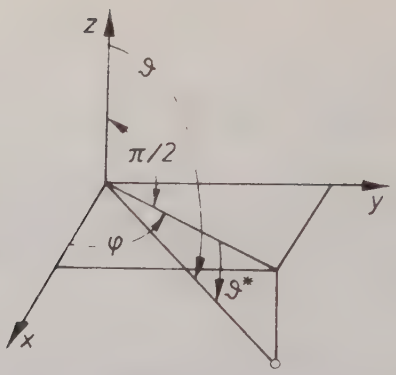
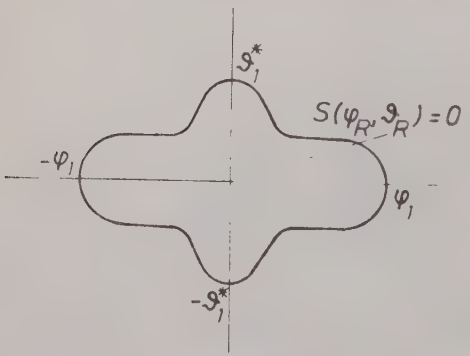


Bild 2.3

Bei Wellenleitungen der Gruppe a) (ideal leitende Berandungsfläche) soll die Querschnittsfläche so beschaffen sein, daß



$$\pm\,\varphi(\vartheta^*) = \pm\,\varphi(-\vartheta^*)$$
$$\pm\,\vartheta^*(\varphi) = \pm\,\vartheta^*(-\varphi) \qquad (2.6)$$

Bild 2.4

gelten. Bei den Kugelsektorhörnern (Gruppe b), werden die Wände durch die Koordinatenflächen

$$\vartheta^* = \pm\,\vartheta_1^* \qquad (2.7)$$

und

$$\varphi = \pm\,\varphi_1$$

beschrieben. Sie können eine bestimmte von Null verschiedene Oberflächenimpedanz besitzen, wobei die von gegenüberliegenden Wänden gleich sein sollen.

2.2.2 Die Gleichungen für die Feldkomponenten

Elektromagnetische Felder in homogenen Hohlleitungen beschreibt man meist durch eine Überlagerung von E- und H-Wellen, deren Feldkomponenten sich aus je einem skalaren Potential herleiten lassen. Diese Potentiale sind identisch mit den Feldkomponenten in Ausbreitungsrichtung. Für die Berechnung von Feldern in trichterförmigen Wellenleitungen werden zweckmäßig Kugelkoordinaten und sphärische Komponenten verwendet. Dann kann man die Maxwellschen Gleichungen

$$\text{rot } \vec{H} = j\omega\varepsilon_o\varepsilon_r \vec{E} \tag{2.8}$$

und

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu_o\mu_r \vec{H} \tag{2.9}$$

durch zwei skalare Potentiale Π_E und Π_H lösen, die als Radialkomponenten des elektrischen und magnetischen Hertzschen Vektors interpretiert werden können. Elektrisches und magnetisches Feld folgen aus

$$\vec{E} = \text{rot rot } (\vec{u}_r\Pi_E) + j\omega\mu_o\mu_r \text{rot } (\vec{u}_r\Pi_H) \tag{2.10}$$

und

$$\vec{H} = j\omega\varepsilon_o\varepsilon_r \text{rot } (\vec{u}_r\Pi_E) - \text{rot rot } (\vec{u}_r\Pi_H).^{1)} \tag{2.11}$$

Beide Potentiale Π_E und Π_H genügen der Wellengleichung, die in Kugelkoordinaten die Form

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Pi}{\partial\vartheta}\right) + k^2\Pi = 0 \tag{2.12}$$

annimmt (in dieser Gleichung wurde, wie auch in den folgenden Gln. (2.13) - (2.18), der Index E bzw. H weggelassen).

Da nur Wellenleitungen betrachtet werden, bei denen die Gleichung (2.5) der Berandungsfläche die Variable r nicht enthält, wird versucht, die Differentialgleichung (2.12) durch den Ansatz

$$\Pi = f(\varphi,\vartheta)\, g(r) \tag{2.13}$$

1) Aus Gln. (2.10) und (2.11) folgt, daß Π_E die Dimension Vm, Π_H die Dimension Am hat. Die Funktionen f_E und f_H sollen dieselben Dimensionen wie Π_E und Π_H besitzen, g_E und g_H dimensionslos sein.

zu lösen. Damit wird aus Gl. (2.12)

$$r^2 \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{f} \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{f} \frac{1}{\sin\vartheta} \left(\cos\vartheta \frac{\partial f}{\partial\vartheta} + \sin\vartheta \frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2} \right) + r^2 k^2 = 0 \,, \tag{2.14}$$

woraus mit der Separationskonstanten

$$\nu(\nu + 1) \tag{2.15}$$

die beiden Gleichungen

$$\frac{r^2}{g} \frac{d^2 g}{dr^2} + k^2 r^2 = \nu(\nu+1) \tag{2.16}$$

und

$$\frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \cot\vartheta \frac{\partial f}{\partial\vartheta} + \frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta^2} + \nu(\nu+1) f = 0 \tag{2.17}$$

entstehen. Gl. (2.16) besitzt die Lösung

$$g(r) = \left[C_1 H^{(1)}_{\nu+1/2}(kr) + C_2 H^{(2)}_{\nu+1/2}(kr) \right] \sqrt{kr} \,. \tag{2.18}$$

In dieser Gleichung bedeuten $H^{(1)}_{\nu+1/2}$ und $H^{(2)}_{\nu+1/2}$ die Hankelfunktionen erster und zweiter Art der Ordnung $\nu+1/2$. C_1 und C_2 sind Integrationskonstanten. Die Lösung von Gl. (2.17) mit Hilfe des Differenzenverfahrens wird im Abschnitt 2.2.4 beschrieben. Den Charakter der beiden Terme in der Lösung (2.18) für g(r) erkennt man aus dem asymptotischen Verhalten. Denn für

$$kr \gg 1 \quad \text{und} \quad kr \gg \nu + \frac{1}{2} \tag{2.19}$$

gehen die Hankelfunktionen über [3]

$$H^{(1),(2)}_{\nu+1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\, e^{\pm j(kr - \frac{\nu+1}{2}\pi)} \,, \tag{2.20}$$

so daß bei einer Zeitabhängigkeit von $e^{j\omega t}$ der erste Term eine Welle darstellt, die zur Spitze der trichterförmigen Wellenleitung

hin, der zweite Term eine Welle, die in entgegengesetzter Richtung, also nach außen läuft. In dieser Näherung gilt daher

$$\frac{dg(r)}{dr} = \pm jk\, g(r) . \tag{2.21}$$

Sobald $g(r)$ und $f(\varphi,\vartheta)$ und mit Gl. (2.13) auch die Potentiale Π_E und Π_H bekannt sind, folgen die Feldkomponenten aus Gl. (2.10) und (2.11) zu

$$E_r = \frac{\nu_E(\nu_E+1)}{r^2} f_E\, g_E \tag{2.22}$$

$$E_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial f_E}{\partial \vartheta}\frac{dg_E}{dr} + \frac{j\omega\mu_o\mu_r}{r\sin\vartheta} g_H \frac{\partial f_H}{\partial \varphi} \tag{2.23}$$

$$E_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f_E}{\partial \varphi}\frac{dg_E}{dr} - \frac{j\omega\mu_o\mu_r}{r} g_H \frac{\partial f_H}{\partial \vartheta} \tag{2.24}$$

$$H_r = -\frac{\nu_H(\nu_H+1)}{r^2} f_H\, g_H \tag{2.25}$$

$$H_\vartheta = \frac{j\omega\varepsilon_o\varepsilon_r}{r\sin\vartheta} g_E \frac{\partial f_E}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial f_H}{\partial \vartheta}\frac{dg_H}{dr} \tag{2.26}$$

$$H_\varphi = -\frac{j\omega\varepsilon_o\varepsilon_r}{r} g_E \frac{\partial f_E}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f_H}{\partial \varphi}\frac{dg_H}{dr} \tag{2.27}$$

Bei der Berechnung des Strahlungsfeldes der Hornantennen soll, wie schon erwähnt, davon ausgegangen werden, daß in der trichterförmigen Wellenleitung nur die Hauptwelle angeregt wird. In der Literatur ist die "Hauptwelle" nur für zylindrische Hohlleitungen definiert. Angewendet auf trichterförmige Wellenleitungen mit unendlich gut leitenden Wänden wird in dieser Arbeit mit Hauptwelle der Wellentyp bezeichnet, der bei gegen Null gehenden Öffnungswinkeln mit der Hauptwelle der dann entstehenden zylindrischen Wellenleitung identisch ist. Dabei soll die Querschnittsfläche dieser zylindrischen Wellenleitung denen der trichterförmigen ähnlich sein. Im Falle eines Kugelsektorhorns mit Wänden

endlicher Oberflächenimpedanz soll zudem diese gleichzeitig gegen Null gehen.

2.2.3 Die Randbedingungen

2.2.3.1 Wellenleitungen mit vollkommen leitenden Wänden

Für trichterförmige Wellenleitungen mit vollkommen leitenden Wänden lautet die Randbedingung

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \tag{2.28}$$

wenn $\vec{n}$ die Flächennormale auf der Berandungsfläche ist. Wie sich diese Bedingung auf die Potentiale Π_E, Π_H und damit auf die Funktionen f_E, f_H überträgt, ergibt sich aus Gln. (2.22) bis (2.24) in Vektorform

$$\vec{E} = \vec{u}_r \frac{\nu_E(\nu_E+1)}{r^2} f_E g_E + \frac{dg_E}{dr} \operatorname{grad}_{\vartheta,\varphi} f_E + j\omega\mu_0\mu_r g_H \operatorname{grad}_{\vartheta,\varphi} f_H \times \vec{u}_r. \tag{2.29}$$

Aus dieser Gleichung folgt nämlich zunächst, daß auf der Berandungsfläche

$$f_E(\vartheta,\varphi) = 0 \tag{2.30}$$

erfüllt sein muß. Dort verschwindet dann auch $\vec{n} \times \operatorname{grad}_{\vartheta,\varphi} f_E$, da der Gradient von f_E auf jeder Potentialfläche f_E = konst. und damit auch auf der Randfläche senkrecht steht. Ferner ergibt sich aus

$$\vec{n} \times (\operatorname{grad}_{\vartheta,\varphi} f_H \times \vec{u}_r) = (\vec{n}\cdot\vec{u}_r)\operatorname{grad}_{\vartheta,\varphi} f_H - \vec{u}_r(\vec{n}\cdot\operatorname{grad}_{\vartheta,\varphi} f_H) \tag{2.31}$$

wegen $\vec{n}\cdot\vec{u}_r = 0$, daß f_H auf dem Rand die Bedingung

$$\vec{n}\cdot\operatorname{grad}_{\vartheta,\varphi} f_H = \frac{\partial f_H}{\partial n} = 0 \tag{2.32}$$

erfüllen muß. Aufgrund der Randbedingungen Gln. (2.30) und (2.32) läßt sich das Feld, das aus Gln. (2.10) und (2.11) oder Gln. (2.22) bis (2.27) folgt, in zwei voneinander entkoppelte Anteile aufspalten, nämlich in ein Teilfeld, das sich nur aus Π_e bestimmt, wobei Π_e der Randbedingung $\Pi_E = f_E = 0$ genugt und in ein Teilfeld, das sich allein aus Π_H herleitet, wobei Π_H der Randbedingung $\partial\Pi_H/\partial n = \partial f_H/\partial n = 0$ gehorcht. Aus Gl. (2.22) folgt, daß der erste Anteil in radialer Richtung nur eine elektrische Komponente besitzt ($H_r = 0$). Er wird deshalb E-Welle genannt. Entsprechend wird der zweite, bei dem nach Gl. (2.25) $E_r = 0$ ist, als H-Welle bezeichnet.

2.2.3.2 Kugelsektorförmige Wellenleitungen mit von Null verschiedener Wandimpedanz

Häufig werden für die Konstruktion von Hornstrahlern Wellenleitungen verwendet, bei denen z.B. durch Beschichten der Wände mit einem Dielektrikum oder durch Einfräsen von schmalen Riefen spezielle Oberflächenstrukturen hergestellt werden. Zur exakten Berechnung der Felder in einer solchen Wellenleitung teilt man deren Querschnitt in einen inneren Bereich ① mit homogener Materialverteilung und in einen Randbereich ② auf. Für beide Bereiche müssen Lösungen der Wellengleichungen gefunden werden, die an der Grenzschicht zwischen ① und ② die Stetigkeitsbedingungen

$$E_{\tan 1} = E_{\tan 2} \tag{2.33}$$

und

$$H_{\tan 1} = H_{\tan 2} \tag{2.34}$$

erfüllen. Angewendet auf ein Kugelsektorhorn ergeben sich damit folgende Gleichungen (siehe Bild 2.5)

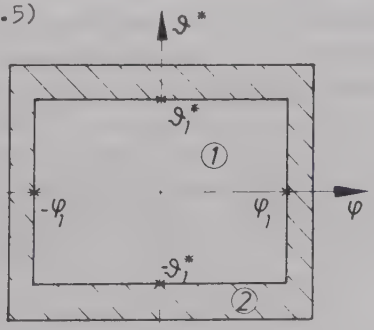


Bild 2.5

Grenzschicht $\vartheta^* = \vartheta_1^*$

$$E_{\varphi_1} = E_{\varphi_2} \quad \text{und} \quad E_{r_1} = E_{r_2} \,, \qquad (2.35,2.36)$$

$$H_{\varphi_1} = H_{\varphi_2} \quad \text{und} \quad H_{r_1} = H_{r_2} \,; \qquad (2.37,2.38)$$

Grenzschicht $\varphi = \varphi_1$

$$E_{\vartheta_1} = E_{\vartheta_2} \quad \text{und} \quad E_{r_1} = E_{r_2} \,, \qquad (2.39,2.40)$$

$$H_{\vartheta_1} = H_{\vartheta_2} \quad \text{und} \quad H_{r_1} = H_{r_2} \,. \qquad (2.41,2.42)$$

Die exakte Berechnung der Vektorpotentiale in beiden Bereichen ist im allgemeinen so kompliziert, daß sie meist nicht durchführbar ist. Wenn jedoch nur die Feldverteilung im Raum ① interessiert, kann die Rechnung stark vereinfacht werden durch die Anwendung des Wandimpedanzkonzeptes, das von Schellkunoff [4] eingeführt wurde. Dazu setzt man

$$\left.\frac{E_{\varphi_2}}{H_{r_2}}\right|_{\vartheta^*=\vartheta_1^*} = Z_{\varphi r} \quad \text{und} \quad -\left.\frac{E_{r_2}}{H_{\varphi_2}}\right|_{\vartheta^*=\vartheta_1^*} = Z_{r\varphi} \,, \qquad (2.43,2.44)$$

$$-\left.\frac{E_{\vartheta_2}}{H_{r_2}}\right|_{\varphi=\varphi_1} = Z_{\vartheta r} \quad \text{und} \quad \left.\frac{E_{r_2}}{H_{\vartheta_2}}\right|_{\varphi=\varphi_1} = Z_{r\vartheta} \,, \qquad (2.45,2.46)$$

wobei $Z_{\varphi r}$ und $Z_{r\varphi}$ Funktionen von ϑ, $Z_{\vartheta r}$ und $Z_{r\vartheta}$ Funktionen von φ sein können.[1] Aus den Gln. (2.35) bis (2.42) folgt, daß zur Berechnung der Ausbreitungskonstanten einer Welle und ihrer Feldverteilung in ① nur noch eine Lösung der Wellengleichung für den

1) $Z_{\varphi r}$, $Z_{r\varphi}$, $Z_{\vartheta r}$, $Z_{r\vartheta}$ sind die Werte der Feldwellenwiderstände in der Grenzschicht $\varphi = \varphi_1$ bzw. $\vartheta^* = \vartheta_1^*$. Letztere werden positiv gezählt, wenn die beiden ins Verhältnis gesetzten Feldkomponenten und die auf diesen senkrecht stehende dritte Koordinatenrichtung ein Rechtssystem bilden.

Bereich (1) gefunden werden muß, die die Randbedingungen

$$\left.\frac{E_{\varphi_1}}{H_{r_1}}\right|_{\vartheta^*=\vartheta_1^*} = Z_{\varphi r} \quad \text{und} \quad -\left.\frac{E_{r_1}}{H_{\varphi_1}}\right|_{\vartheta^*=\vartheta_1^*} = Z_{r\varphi} \,, \qquad (2.47,2.48)$$

$$-\left.\frac{E_{\vartheta_1}}{H_{r_1}}\right|_{\varphi=\varphi_1} = Z_{\vartheta r} \quad \text{und} \quad \left.\frac{E_{r_1}}{H_{\vartheta_1}}\right|_{\varphi=\varphi_1} = Z_{r\vartheta} \qquad (2.49,2.50)$$

erfüllt. $Z_{\varphi r}$, $Z_{r\varphi}$, $Z_{\vartheta r}$ und $Z_{r\vartheta}$ werden in der Literatur als Oberflächen- oder Wandimpedanz [5] bezeichnet. Der Vorteil dieses vereinfachten Verfahrens besteht darin, daß für vorgegebene Wandimpedanzen das Aperturfeld und daraus das Strahlungsverhalten berechnet werden können. Die Realisierung von Flächen bestimmter Impedanz wird im Abschnitt 7.1 besprochen.

Im Gegensatz zum Randwertproblem mit vollkommen leitenden Wänden (Abschnitt 2.2.3.1) sind bei beliebigen Wandimpedanzen f_E und f_H im allgemeinen nicht unabhängig voneinander, es gibt indessen auch hier spezielle Fälle, in denen E- und H-Wellen entkoppelt sind. In den Abschnitten 4.3 und 4.4.1 werden Beispiele, die zu dieser Gruppe gehören, diskutiert. Im Falle der Verkopplung sollen zur Vereinfachung nur solche Lösungen gesucht werden, für die die Differentialgleichung (2.17) für f_E und f_H durch dieselben Eigenwerte $\nu(\nu+1)$ erfüllt wird. Dann erhält man mit

$$\nu_E = \nu_H = \nu \qquad (2.51)$$

aus Gl. (2.18)

$$g_E(r) = g_H(r) = g(r) \,. \qquad (2.52)$$

Aus den Gleichungen für die transversalen Feldkomponenten, Gln. (2.23) - (2.24) und Gln. (2.26) - (2.27), folgt, daß die beiden aus den Potentialen Π_E und Π_H abgeleiteten Anteile nur dann e i n e Welle bilden, wenn

$$\frac{dg(r)}{dr} = -jk\,C_g\,g(r) \qquad (2.53)$$

erfüllt ist, wobei C_g eine Konstante ist. Da die Lösungen (2.18) der Differentialgleichung (2.16) Zylinderfunktionen sind, ist die Einhaltung der Bedingung (2.53) nur näherungsweise möglich. Sie ist erfüllt für das durch Gl. (2.20) beschriebene asymptotische Verhalten der Lösung (2.18). Eine ausführliche Diskussion erfolgt im Abschnitt 4.1.

Durch das Einsetzen der Gleichungen für die Feldkomponenten (Gln. (2.22) - (2.27)) in Gln. (2.47) - (2.50) erhalt man

an der Wand $\vartheta^* = \vartheta_1^*$

$$- j \frac{C_g\, kr}{\sin\vartheta} Z_{r\varphi} \frac{\partial f_H}{\partial\varphi} + jkr \frac{Z_{r\varphi}}{Z} \frac{\partial f_E}{\partial\vartheta} - \nu(\nu+1)\, f_E = 0 \,, \qquad (2.54)$$

$$j \frac{C_g\, kr}{\sin\vartheta} \frac{1}{Z_{\varphi r}} \frac{\partial f_E}{\partial\varphi} + jkr \frac{Z}{Z_{\varphi r}} \frac{\partial f_H}{\partial\vartheta} - \nu(\nu+1)\, f_H = 0 \,, \qquad (2.55)$$

und an der Wand $\varphi = \varphi_1$

$$j \frac{kr}{\sin\vartheta} \frac{Z_{r\vartheta}}{Z} \frac{\partial f_E}{\partial\varphi} + jC_g\, kr\, Z_{r\vartheta} \frac{\partial f_H}{\partial\vartheta} - \nu(\nu+1)\, f_E = 0, \qquad (2.56)$$

$$j \frac{kr}{\sin\vartheta} \frac{Z}{Z_{\vartheta r}} \frac{\partial f_H}{\partial\varphi} - jC_g\, kr \frac{1}{Z_{\vartheta r}} \frac{\partial f_E}{\partial\vartheta} - \nu(\nu+1)\, f_H = 0. \qquad (2.57)$$

Dabei ist Z der Wellenwiderstand eines Mediums mit den Materialkonstanten ϵ_r und μ_r:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_o \mu_r}{\epsilon_o \epsilon_r}} = Z_o \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \,. \qquad (2.58)$$

In Gln. (2.54) - (2.57) hängen f_E und f_H im allgemeinen nicht nur von ϑ und φ, sondern auch noch von r ab, was dem Ansatz in Gl. (2.13) widerspricht. Zur Befriedigung von Gl. (2.13) müssen daher $Z_{r\vartheta}$ und $Z_{r\varphi}$ proportional $\frac{1}{r}$ und $Z_{\vartheta r}$ und $Z_{\varphi r}$ proportional r angenommen werden.

2.2.4 Anwendung des Differenzenverfahrens zur Lösung des Randwertproblems

Die Gl. (2.17) ist eine homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung der beiden Veränderlichen φ und ϑ, die man üblicherweise in der Form

$$L[f] = \nu(\nu+1)\, f = \Lambda\, f$$

schreibt. Aufgrund der im vorherigen Abschnitt diskutierten Randbedingungen ergeben sich drei Eigenwertaufgaben:

I. $$L[f_E] = \Lambda\, f_E \tag{2.59}$$

mit der Randbedingung (2.30)

$$f_E = 0\ , \tag{2.60}$$

II. $$L[f_H] = \Lambda\, f_H \tag{2.61}$$

mit der Randbedingung (2.32)

$$\frac{\partial f_H}{\partial n} = 0 \tag{2.62}$$

und

III. $$\left.\begin{aligned} L[f_E] &= \Lambda\, f_E\ , \\ L[f_H] &= \Lambda\, f_H \end{aligned}\right\} \tag{2.63}$$

mit den Randbedingungen (2.54) bis (2.57)

$$\left.\begin{aligned} U_1[f_E] + U_2[f_H] - \Lambda\, f_E &= 0 \quad \text{und} \\ U_3[f_E] + U_4[f_H] - \Lambda\, f_H &= 0\ . \end{aligned}\right\} \tag{2.64}$$

Dabei sind für die Wand $\vartheta^* = \vartheta_1^*$

$$U_1[f_E] = jkr \frac{Z_{r\varphi}}{Z} \frac{\partial f_E}{\partial \vartheta} \quad , \qquad U_2[f_H] = -j \frac{C_g kr}{\sin\vartheta} Z_{r\varphi} \frac{\partial f_H}{\partial \varphi} \quad , \tag{2.65}$$

$$U_3[f_E] = j \frac{C_g kr}{\sin\vartheta} \frac{1}{Z_{\varphi r}} \frac{\partial f_E}{\partial \varphi}, \qquad U_4[f_H] = jkr \frac{Z}{Z_{\varphi r}} \frac{\partial f_H}{\partial \vartheta} \quad , \tag{2.66}$$

und für die Wand $\varphi = \varphi_1$

$$U_1[f_E] = j \frac{kr}{\sin\vartheta} \frac{Z_{r\vartheta}}{Z} \frac{\partial f_E}{\partial \varphi} \quad , \qquad U_2[f_H] = j C_g kr Z_{r\vartheta} \frac{\partial f_H}{\partial \vartheta} \quad , \tag{2.67}$$

$$U_3[f_E] = -j C_g kr \frac{1}{Z\vartheta r} \frac{\partial f_E}{\partial \vartheta} \quad , \qquad U_4[f_H] = j \frac{kr}{\sin\vartheta} \frac{Z}{Z\vartheta r} \frac{\partial f_H}{\partial \varphi} \quad . \tag{2.68}$$

Die Eigenwertaufgaben I und II sind Sonderfälle des allgemeinen Eigenwertproblems III.

Eine geeignete Methode zur Lösung dieser Eigenwertaufgaben, die aufgrund der Berandungsform und der Randbedingungen - wie schon erwähnt - nicht nach dem Verfahren der Separation der Veränderlichen behandelt werden können, ist das Differenzenverfahren. Dabei werden in der Differentialgleichung und in den Randbedingungen alle Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt (eine ausführliche Beschreibung findet man z.B. in [6]).

Über das von der Kurve Γ berandete Gebiet G, in dem die Lösung f gesucht ist, wird ein Netz aus rechteckigen Maschen mit den Weiten h_φ und h_ϑ gelegt, wie in Bild 2.6 skizziert. Mit Hilfe des Netzes läßt sich eine Kurve Γ_1 konstruieren, die die ursprüngliche Berandungskurve Γ approximiert und durch eine Verbindung von Gitterpunkten entsteht. Die Ableitung von f in einem Gitterpunkt m_o, n_o läßt sich durch eine Linearkombination von Funktionswerten von f in benachbarten Gitterpunkten approximieren, indem man f im Punkt m_o, n_o in eine Taylorreihe entwickelt. In [8] ist eine Tabelle mit eindimensionalen Differenzenformeln angegeben,

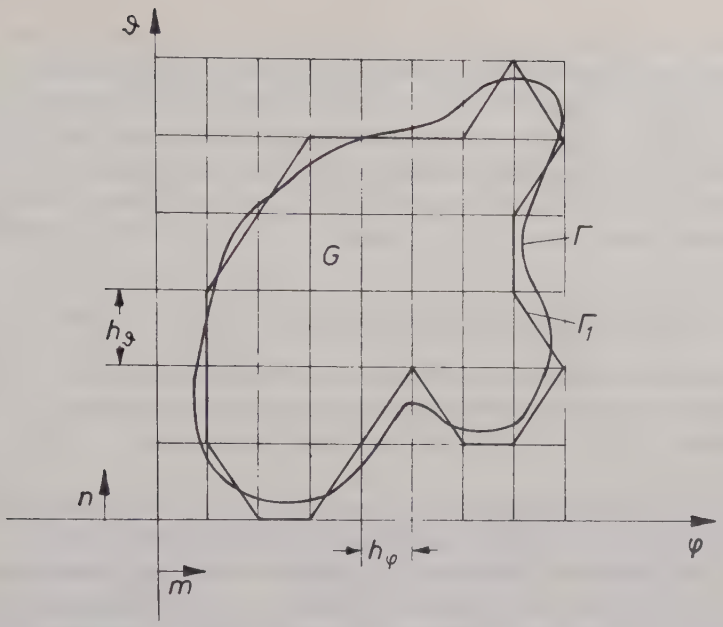


Bild 2.6

mit deren Hilfe sich die im vorliegenden Fall notwendigen zweidimensionalen Formeln leicht erstellen lassen. Das Ersetzen der Differentialquotienten durch Differenzenquotienten überführt die Differentialgleichung und die Randbedingungen in Differenzengleichungen. Das Aufstellen der Differenzengleichungen in allen Gitterpunkten innerhalb und auf der Randkurve Γ_1 führt zu einem linearen homogenen Gleichungssystem mit den Funktionswerten $f_{m,n}$ als Unbekannten. Dieses Gleichungssystem läßt sich in der Form

$$\Big((C) - \lambda \quad (I)\Big) \quad (F) = (B) \quad (F) = 0 \qquad (2.69)$$

schreiben ([7],[8]). Wenn man insgesamt K Gitterpunkte hat, sind (C) eine quadratische Matrix von der Ordnung K und (F) ein Spaltenvektor mit K Komponenten. (I) bedeutet die Einheitsmatrix. Durch das Differenzenverfahren wird also die Aufgabe, eine Lösung der in den Gln. (2.59) - (2.64) angegebenen Eigenwertprobleme zu finden, übergeführt in die Aufgabe, Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen zu bestimmen.

Im allgemeinen lassen sich quantitative Aussagen uber die Genauigkeit der Ergebnisse, die mit Hilfe des Differenzenverfahrens gewonnen wurden, nicht machen. In der vorliegenden Arbeit erfolgt deshalb eine Diskussion der Größe der auftretenden Fehler anhand solcher Fälle, die auch mit analytischen Methoden berechnet werden können. Man kann jedoch von vornherein erwarten, daß die Genauigkeit der Ergebnisse zunimmt, wenn

a) die Übereinstimmung zwischen den Kurven Γ und Γ_1 und,

b) die Annaherung der Differentialquotienten durch die Differenzenquotienten in allen Netzpunkten verbessert werden.

Bei gekrümmten Berandungskurven Γ lassen sich gute Ergebnisse nur durch eine Verkleinerung der Maschenweiten erreichen, was allerdings eine Vergrößerung der Matrix (C) und damit eine erhebliche Zunahme der Rechenzeit bei der Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren zur Folge hat. Nur im Falle des Kugelsektorhorns, für das das Gebiet G in Bild 2.6 ein Rechteck ist, kann eine größere Genauigkeit sowohl durch kleinere Maschenweiten als auch durch Differenzenquotienten höherer Ordnung realisiert werden. Da durch die zuletzt genannte Methode die Behandlung großer Matrizen vermieden werden kann, wird sie für die Berechnung von Kugelsektorhörnern mit Wandimpedanz herangezogen.

3. Hornstrahler mit vollkommen leitenden Wänden

3.1 Rechenprogramm zur Berechnung des Feldes in der Apertur

Beim gewöhnlichen Differenzenverfahren werden die ersten beiden Ableitungen nach ϑ in einem Gitterpunkt m_o, n_o durch folgende Ausdrücke [9] ersetzt:

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta} \approx \frac{f_{m_o,n_o+1} - f_{m_o,n_o-1}}{2h_\vartheta} , \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} \approx \frac{f_{m_o,n_o-1} - 2f_{m_o,n_o} + f_{m_o,n_o+1}}{h^2_\vartheta} . \tag{3.2}$$

Für die Ableitungen nach φ gelten entsprechende Formeln. Ihre Anwendung auf die Differentialgleichung führt zu einem linearen Gleichungssystem, das in Matrizenform geschrieben Gl. (2.69) ergibt. In jeder Zeile der Matrix (C) sind neben dem Element in der Hauptdiagonalen noch maximal 4 weitere Elemente ungleich Null. Da zur Erreichung einer hinreichenden Genauigkeit des Ergebnisses sehr viele Gitterpunkte gewählt werden müssen, die Ordnung der Matrix also sehr groß wird, sind direkte Verfahren zur Lösung des Eigenwertproblems, bei denen die gesamte Matrix im Rechner gespeichert werden muß, nicht anwendbar. Einen nur geringen Speicherbedarf benötigt dagegen ein Verfahren, das auf der Anwendung der "Successive Overrelaxation" (SOR) [10] basiert und im folgenden kurz skizziert werden soll.

Als Ausgangswert für die Berechnung des Potentials eines Wellentyps nach diesem Verfahren benötigt man einen Näherungswert für den Eigenwert Λ in Gl. (2.69), der im folgenden mit einer hochgestellten Null gekennzeichnet wird. Um diesen zu berechnen, werden für eine geringe Anzahl von Gitterpunkten (ca. 30) alle Elemente der Matrix (C) in Gl. (2.69) bestimmt. Anschließend wird (C) mit Hilfe der Ähnlichkeitstransformation nach Hessenberg [11] auf eine Fastdreieckform gebracht, aus der dann mit Hilfe der QR-Iteration [12] alle Eigenwerte bestimmt werden. In den meisten Fällen läßt sich die Entscheidung, welcher der Matrixeigenwerte zu dem zu untersuchenden Wellentyp gehört, fallen, indem man die Ausbreitungskonstante einer entsprechenden zylindrischen Hohlleitung mit rechteckigem oder rundem Querschnitt bestimmt. Nur wenn die Zuordnung nicht eindeutig ist, müssen die Eigenvektoren aller in Frage kommenden Matrixeigenwerte berechnet werden. Prinzipiell kann man den zum Eigenwert $\Lambda^{(0)}$ gehörigen Eigenvektor ($F^{(0)}$) durch Auflösen des Gleichungssystems (2.69) mit

Hilfe der SOR bestimmen. Es zeigt sich jedoch, daß man Rechenzeit einspart, wenn man $(F^{(0)})$ direkt berechnet. Man erhält

$$(F^{(0)}) = \begin{bmatrix} f_1^{(0)} \\ f_2^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_K^{(0)} \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

nämlich sehr schnell, indem man

$$f_1^{(0)} = 1$$

setzt und das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&\left(c_{22}-\Lambda^{(0)}\right)f_2^{(0)} + c_{23}f_3^{(0)} + \cdots c_{2K}f_K^{(0)} &&= -c_{21}\\
&c_{32}\,f_2^{(0)} + \left(c_{33}-\Lambda^{(0)}\right)f_3^{(0)} + \cdots c_{3K}f_K^{(0)} &&= -c_{31}\\
&\quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdots \quad \cdot\\
&\quad\cdot \qquad\quad \cdot \qquad\quad \cdots \quad \cdot\\
&c_{K2}\,f_2^{(0)} + c_{K2}f_3^{(0)} + \cdots \left(c_{KK}-\Lambda^{(0)}\right)f_K^{(0)} &&= -c_{K1}
\end{aligned}$$

durch Matrix-Inversion löst.

Nun wird der Maschenabstand halbiert. Die Bestimmung des zu diesem neuen Maschennetz gehörigen Eigenvektors $(F^{(1)})$, die durch Lösen des Gleichungssystems (2.63) mit $\Lambda^{(0)}$ als Eigenwert erfolgt, wird mit Hilfe der SOR durchgeführt. Ähnlich wie bei der Gauß-Seidel-Iteration wird bei der SOR jede Zeile des Gleichungssystems nach dem Diagonalglied aufgelöst. Wenn die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems Hauptdiagonalelemente besitzt, die gegenüber den übrigen Elementen einer Zeile dem

Betrage nach genügend stark überwiegen, erhält man dadurch aus der i-ten Zeile eine Gleichung, mit der man aus Näherungswerten für die Elemente des Spaltenvektors, $f_1^{(I)}$, $f_2^{(I)}$, ... $f_{2K-1}^{(I)}$ verbesserte Werte $f_i^{(II)}$ berechnen kann. Zur Verbesserung der Konvergenz wird ein Relaxationsfaktor Ω [13] so eingeführt, daß die Bestimmungsgleichung für $f_i^{(II)}$

$$b_{i,i}\, f_i^{(II)} = \Omega \left[\sum_{k=1}^{i-1} b_{i,k}\, f_k^{(II)} + \sum_{k=i+1} b_{i,k}\, f_k^{(I)} \right] - (\Omega-1) f_i^{(I)} \qquad (3.4)$$

lautet, wobei die $b_{i,k}$ die Elemente der Matrix (B) in Gl. (2.69) sind (für $\Omega = 1$ erhält man die Gauß-Seidel-Iteration). Dabei werden in den Gitterpunkten, die mit dem Netz vor der Halbierung des Maschenabstandes identisch sind, die Werte von $(F^{(0)})$ als Näherungswerte herangezogen. Für die neu hineinkommenden Gitterpunkte werden diese durch Interpolation aus $(F^{(0)})$ bestimmt. Ist die Berechnung nach Gl. (3.4) für alle Zeilen durchgeführt worden, dann kann man unter Zugrundelegung der so gefundenen Werte weiter verbesserte $f_i^{(II)}$ durch eine erneute Anwendung der Gl. (3.4) gewinnen. Dieses Verfahren wird solange wiederholt, bis eine Lösung $(F^{(1)})$ gefunden ist, die das Gleichungssystem hinreichend genau erfüllt. Aus Gl. (3.4) ist ersichtlich, daß nur der Spaltenvektor $(F^{(1)})$ im Rechner gespeichert werden muß.

Voraussetzung für die Konvergenz des Verfahrens ist, daß die Matrix (B) positiv definit ist [14]. In [15] wird gezeigt, daß (B) für höhere Eigenwerte diese Bedingung nicht erfüllt, daß jedoch die Matrix

$$(D) = (B)^* \ (B) \ ^{1)} \qquad (3.5)$$

immer positiv definit ist und daß das Gleichungssystem (D)(F) = 0 durch dieselben Eigenwerte und Eigenvektoren befriedigt wird wie Gl. (2.69). Dort ist ebenfalls angegeben, wie man die Elemente

---

1) (B)* ist die Transponierte von (B).

$d_{i,k}$ der Matrix (D) möglichst einfach berechnet.

Nach [16] läßt sich aus $(F^{(1)})$ ein verbesserter Eigenwert mit Hilfe des Rayleigh Quotienten

$$\Lambda^{(1)} \approx \frac{(F^{(1)})^* (C) (F^{(1)})}{(F^{(1)})^* (F^{(1)})} \tag{3.6}$$

berechnen. Nach erneutem Halbieren der Maschenweite wird der Vorgang wiederholt, wobei $\Lambda^{(0)}$ durch $\Lambda^{(1)}$ und $(F^{(0)})$ durch $(F^{(1)})$ ersetzt wird, was auf $(F^{(2)})$ und $\Lambda^{(2)}$ führt. Das Verfahren wird solange fortgesetzt, bis nach p-Schritten

$$\left| \frac{\Lambda^{(p)}}{\Lambda^{(p+1)}} - 1 \right| < 0{,}001 \tag{3.7}$$

ist.

In dieser Arbeit werden nur solche Hornantennen untersucht, die die Symmetriebedingungen (2.6) erfüllen. Es genügt daher, die Potentiale z.B. im Bereich $\vartheta^* > 0$ und $\varphi > 0$, also für einen Quadranten, zu berechnen. In den übrigen Gebieten ergibt sich die Lösung dann aufgrund der bestehenden Symmetrieverhältnisse. Das Rechenprogramm ist so angelegt, daß maximal 10 000 Gitterpunkte berücksichtigt werden können. Die Maschenabstände h_ϑ und h_φ ergeben sich dadurch, daß gleich viele Gitterpunkte auf der ϑ^*-Achse im Bereich $0 \le \vartheta^* \le \vartheta_1^*$ wie auf der φ-Achse im Bereich $0 \le \varphi \le \varphi_1$ liegen sollen.

Bei Kenntnis der Potentiale und der Eigenwerte können alle Feldkomponenten mit Hilfe der Gln. (2.22) - (2.27) durch numerische Differentiation bestimmt werden. Um alle in der Wellenleitung existierenden Wellentypen berechnen zu können, mußte das Rechenprogramm Randbedingungen nach Gl. (2.30) und Gl. (2.32) berücksichtigen. Da jedoch nur das Strahlungsverhalten eines mit der Hauptwelle betriebenen Hornstrahlers diskutiert werden soll, beschränken sich die weiteren Ausführungen auf diesen Wellentyp, der aufgrund der Definition des Begriffs Hauptwelle im Abschnitt 2.2.2 in der trichterförmigen Wellenleitung mit ideal leitenden

Wänden ein H-Wellentyp ist. Das auf die Berechnung von H-Wellen zugeschnittene Rechenprogramm mit der Randbedingung Gl. (2.32) wird durch den Namen HSOR gekennzeichnet.

3.2 Diskussion der Genauigkeit der Ergebnisse. Das Kegelhorn

Die Genauigkeit der mit Hilfe des Rechenprogramms HSOR erzielten Ergebnisse läßt sich zweckmäßig anhand von Kegelhörnern überprüfen. Diese besitzen nämlich einen stark gekrummten Rand, und für bestimmte Wellentypen und Öffnungswinkel läßt sich die exakte Lösung für die Potentiale sehr einfach angeben. Für H-Wellen findet man zunächst [17]

$$\Pi_H = C_H P_\nu^m(\cos\vartheta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} H^{(1)}_{\nu+1/2}(kr) \\ H^{(2)}_{\nu+1/2}(kr) \end{Bmatrix} \sqrt{\frac{\pi kr}{2}} \quad , \quad m = 1,2,3,\ldots^{1)} \qquad (3.8)$$

$P_\nu^m(\cos\vartheta)$ sind die zugeordneten Legendreschen Funktionen erster Art mit dem Grad ν und der Ordnung m. Der Wellentyp in der kegelförmigen Leitung, der für den Öffnungswinkel $\vartheta_1 \to 0$ der Hauptwelle in der Rundhohlleitung entspricht, hat den Index m = 1. Die im allgemeinen nicht ganzzahligen Werte für ν müssen daher gemäß Gl. (2.32) aus

$$\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(P_\nu^1(\cos\vartheta)\right)\right]_{\vartheta=\vartheta_1} = 0 \qquad (3.9)$$

bestimmt werden. Die Berechnung der zugeordneten Legendreschen Funktionen und damit das Lösen von Gl. (3.9) ist allgemein, d.h. für beliebige Öffnungswinkel ϑ_1, sehr umständlich. Indessen kann man für ganzzahlige ν = n sehr einfach die zugehörigen Winkel ϑ_1 bestimmen. Z.B. sind für n = 1 bis n = 4 [18]

---

1) C_H hat die Dimension Am, s. Fußnote S. 8

$$P_1^1(\cos\vartheta) = \sin\vartheta \tag{3.10}$$

$$P_2^1(\cos\vartheta) = \frac{3}{2}\sin 2\vartheta \tag{3.11}$$

$$P_3^1(\cos\vartheta) = \frac{3}{8}(\sin\vartheta + 5\sin 3\vartheta) \tag{3.12}$$

$$P_4^1(\cos\vartheta) = \frac{5}{16}(2\sin 2\vartheta + 7\sin 3\vartheta). \tag{3.13}$$

Damit ist Gl. (3.9) für folgende Werte von ϑ_1 erfüllt:

n	ϑ_1
1	90°
2	45°
3	31,07°
4	23,87°

Andererseits kann man bei beliebigem ν für kleine Winkel ϑ

$$P_\nu^1(\cos\vartheta) \sim J_1(\sqrt{\nu(\nu+1)}\cdot\vartheta) \tag{3.14}$$

setzen [19]. Daraus ergibt sich zusammen mit Gl. (3.9), daß

$$\sqrt{\nu(\nu+1)} = \frac{s_{11}}{\vartheta_1} = \frac{1{,}841}{\vartheta_1} \tag{3.15}$$

ist, wenn s_{11} die erste Nullstelle von $\frac{d}{dx}(J_1(x))$ bedeutet. Beispielsweise ergibt sich daraus für $\vartheta_1 = 10°$ $\nu = 10{,}06$.

Durch Vergleich mit diesen Werten läßt sich nun zeigen, wie genau sowohl ν als auch das Potential mit Hilfe des Rechenprogramms HSOR errechnet werden können. In Tab. 3.1 sind zunächst neben den exakten die Werte für ν aufgeführt, die mit Hilfe von HSOR nach Beendigung der Iteration für einen bestimmten Maschenabstand $h_\varphi = h_\vartheta$ erzielt wurden. Man erkennt, daß man bei der Verwendung eines Maschenabstandes von $\varphi_1/5$ einen Wert für ν erhält, der nur 5 % vom exakten abweicht. Dies ist für die meisten praktischen Fälle der Antennentechnik ausreichend. Bei $h_\varphi = \varphi_1/40$

Tabelle 3.1

ϑ_1	ν exakt	$h_\vartheta = h_\varphi$ $\frac{\varphi_1}{5}$	$\frac{\varphi_1}{10}$	$\frac{\varphi_1}{20}$	$\frac{\varphi_1}{40}$	$\frac{\varphi_1}{80}$
45°	2	2.091	2.013	2.001	1.994	1.993
$31{,}07^\circ$	3	3.143	3.062	3.044	3.015	3.015
$23{,}87^\circ$	4	4.185	4.130	4.092	4.041	4.047
10°	(10.06)	10.516	10.388	10.319	10.107	10.100

sinkt der Fehler unter 1%, bei $h_\varphi = \varphi_1/80$ wird der Fehler nicht weiter verringert. Durch die Kenntnis von ν ist nach Gl. (2.18) der Verlauf aller Feldkomponenten in Abhängigkeit von r vollständig bestimmt. Eine für viele Zwecke hinreichende Diskussion der r-Abhängigkeit kann also schon nach Aufsuchen der Eigenwerte einer verhältnismäßig kleinen Matrix erfolgen.

Die Genauigkeit der mit dem Programm HSOR errechneten Werte für f_H läßt sich ebenfalls durch Vergleich mit dem aus Gl. (3.8) folgenden exakten Verlauf ermitteln. In Bild 3.1 ist für ein Kegelhorn (Öffnungswinkel 45°) f_H in Abhängigkeit von φ für $\vartheta^* = 0$ und $\vartheta^* = 27^\circ$ dargestellt. Die ausgezogene Kurve gibt den exakten Verlauf des Potentials an, Kreuze und Kreise markieren einige Funktionswerte, die mit Hilfe von HSOR errechnet wurden. Man sieht, daß bei $h_\varphi = \varphi_1/5$ der Verlauf von f_H qualitativ richtig wiedergegeben wird, der Fehler jedoch noch bis zu 12 % beträgt. Mit $h_\varphi = \varphi_1/20$ ist er nur in der unmittelbaren Umgebung des Randes noch 3 %, sonst durchweg etwa 1,5 %. Der Fehler verringert sich nicht wesentlich bei der Verwendung von noch kleineren Maschenweiten. Der Vergleich der exakten Werte für die Feldkomponenten mit den numerisch ermittelten zeigt, daß diese bei einem Maschenabstand von $h_\varphi \leq \varphi_1/40$ keinen höheren Fehler als den, wie er für das Vektorpotential genannt wurde, aufweisen.

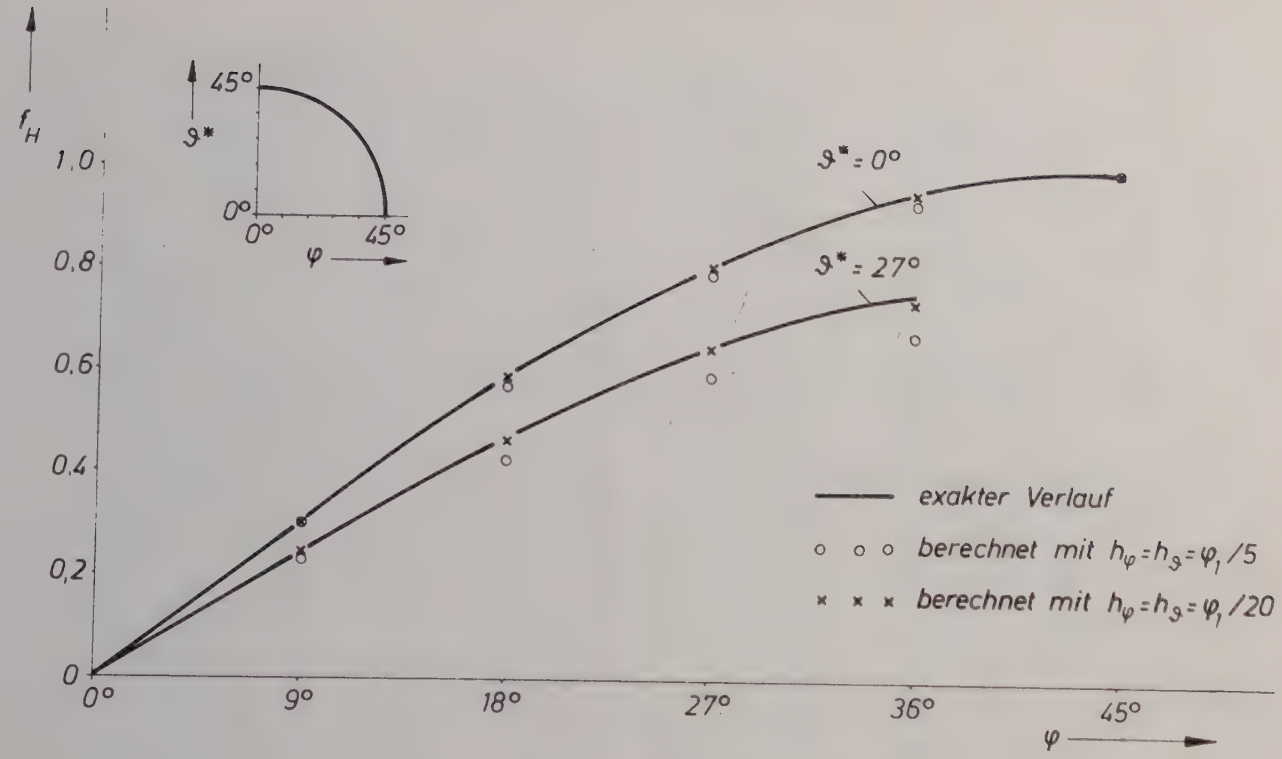


Bild 3.1 : Verlauf der mit HSOR berechneten Funktion f_H für ein Kegelhorn in Abhängigkeit vom verwendeten Maschenabstand (Öffnungswinkel 45°)

Die Berechnung des Richtdiagramms erfolgt nach Gl. (2.4) durch numerische Integration über das so ermittelte Feld der Hauptwelle in der Apertur. Bei der Verwendung von $h_\varphi \leq \varphi_1/20$ ist der durch den Rechenprozeß der Integration auftretende Fehler wesentlich geringer als 0,1 %. Damit ergibt sich, daß der aufgrund der numerischen Operationen auftretende Fehler bei der Berechnung des Richtdiagramms eines Kegelhornes mit einem Öffnungswinkel von 45° sicher unter 2 % liegt. Auch für Kegelhörner mit Öffnungswinkeln von $31{,}07^\circ$, $23{,}87^\circ$ und 10° gelten die angegebenen Fehlergrenzen.

Am Beispiel des Kegelhorns mit einem Öffnungswinkel von 45° soll noch gezeigt werden, wie schnell das Verfahren zur Bestimmung von f_H konvergiert. Zusätzlich wird in Klammern die jeweils benötigte Rechenzeit angegeben. Für die Bestimmung von $\Lambda^{(0)}$ und $(F^{(0)})$ wurde von einem Gitternetz mit 36 Gitterpunkten ausgegangen (6 sec.). Um die Bedingung (3.7) zu erfüllen, wurden zur Berechnung von $(F^{(1)})$ 19 Schritte (14 sec.) benötigt, während für $(F^{(2)})$ p = 10 (34 sec.) und für $(F^{(3)})$ p = 8 (90 sec.) waren.

Alle numerischen Rechnungen wurden an der Rechenanlage TR440 des Rechenzentrums der Ruhr-Universität Bochum durchgeführt.

3.3 Berechnung von Hornstrahlern mit verschiedenen Berandungsformen

3.3.1 Pyramidenhorn

Pyramidenhörner zählen zu den in der Mikrowellentechnik am häufigsten verwendeten Primärstrahlern. Darüber hinaus werden sie oft bei Messung des Gewinns einer Antenne als Normale benutzt, so daß eine möglichst genaue Berechnung ihres Gewinns von einigem praktischen Interesse ist. Da in einem Koordinatensystem, in dem die Wände einer pyramidenförmigen Wellenleitung Koordinatenflächen sind, die Wellengleichung nicht separierbar ist, kann

die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einer solchen Leitung nicht mit Hilfe des Produktansatzes berechnet werden. Den bisher durchgeführten Berechnungen des Strahlungsverhaltens nach der Aperturfeldmethode wurden deshalb Aperturbelegungen zugrunde gelegt, die auf verschiedenen Näherungen beruhen. Die so erzielten Ergebnisse werden im folgenden mit den durch HSOR gewonnenen verglichen.

Die Berandungsflächen einer pyramidenförmigen Wellenleitung, die die Öffnungswinkel φ_1 und ϑ_1^* besitzt, werden durch die Gleichungen

$$\frac{y}{x} = \pm \tan \varphi_1 \qquad (3.18)$$

und

$$\frac{z}{x} = \mp \tan \vartheta_1^* \qquad (3.19)$$

beschrieben (siehe Bild 3.2).

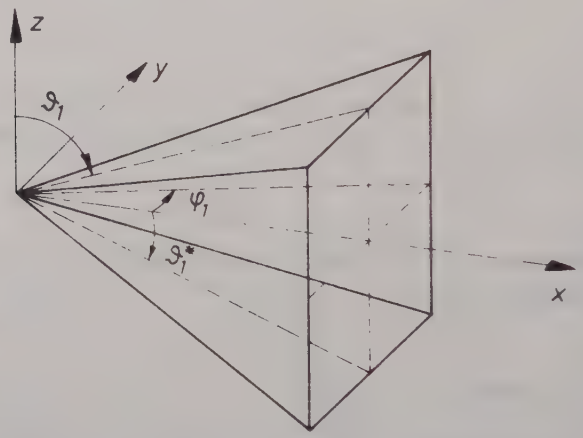


Bild 3.2

Daraus folgt, daß in Kugelkoordinaten für die Seitenwände die Gleichungen

$$\varphi = \pm \varphi_1 \ , \qquad (3.20)$$

sowie für die obere und die untere Wand die Gleichungen

$$\vartheta^* = \pm \arctan\left(\tan\vartheta^* \cos\varphi\right) \tag{3.21}$$

gelten. In Bild 3.3 ist als Beispiel das sich aus diesen Gleichungen ergebende Gebiet G einer pyramidenförmigen Wellenleitung

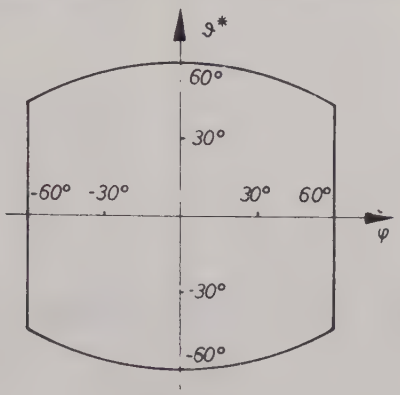


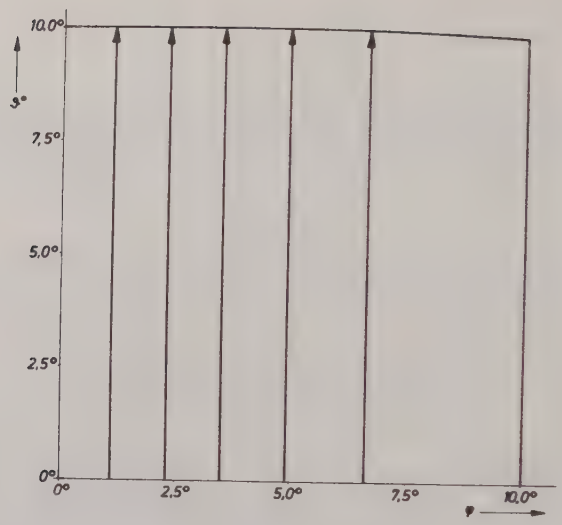
Bild 3.3

mit den Öffnungswinkeln $\varphi_1 = \vartheta_1^* = 60^\circ$ in der $\vartheta^*\varphi$-Ebene entsprechend Bild 2.5 dargestellt.

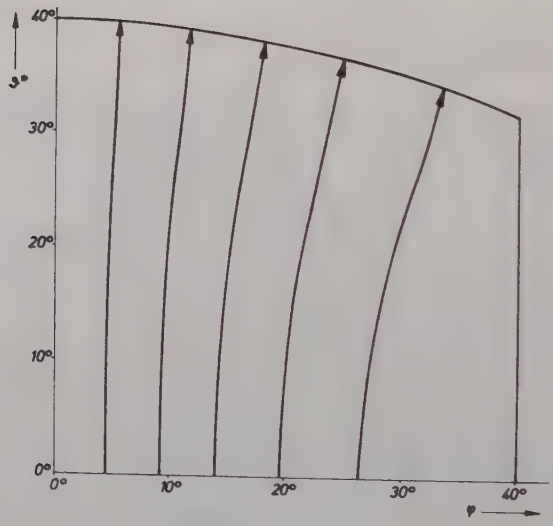
Die Berechnung des Feldes der Hauptwelle wurde für verschiedene Öffnungswinkel φ_1, ϑ_1^* mit HSOR durchgeführt. In den Bildern 3.4 a-d ist der sich daraus ergebende Verlauf des elektrischen Feldes in einer Fläche r = konst. für einige Wellenleitungen mit quadratischer Querschnittsfläche dargestellt. Da sich in allen Fällen ergab, daß in der H-Ebene[1] E_ϑ einen praktisch cos-förmigen Verlauf besitzt (Abweichungen geringer als 0,5 %), liegen die Schnittpunkte der Feldlinien mit der φ-Achse des Koordinatensystems bezogen auf den Öffnungswinkel φ_1 in allen Abbildungen an den gleichen Stellen. Für kleine Öffnungswinkel φ_1 und ϑ_1^* erhält man erwartungsgemäß, daß das elektrische Feld nur eine ϑ-Komponente besitzt:

$$\vec{E} \sim \vec{u}_\vartheta^* \, E_o \cos\left(\frac{\pi\varphi}{2\varphi_1}\right) \tag{3.22}$$

1) Bei einer linear polarisiert gespeisten Antenne mit zwei senkrecht aufeinander stehenden Symmetrieebenen ist die E- oder H-Ebene die Symmetrieebene, in welcher der E- oder H-Vektor liegt.

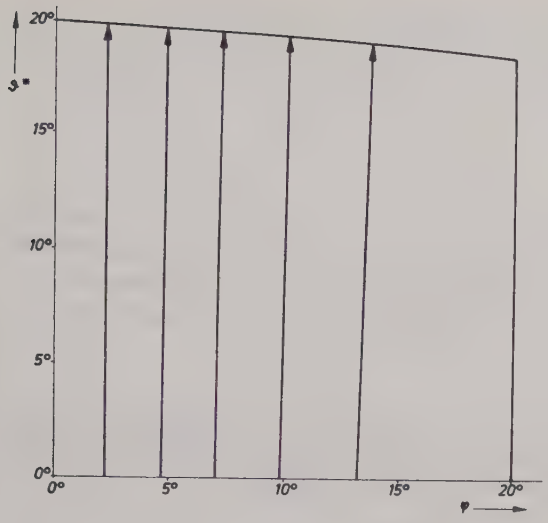


a)

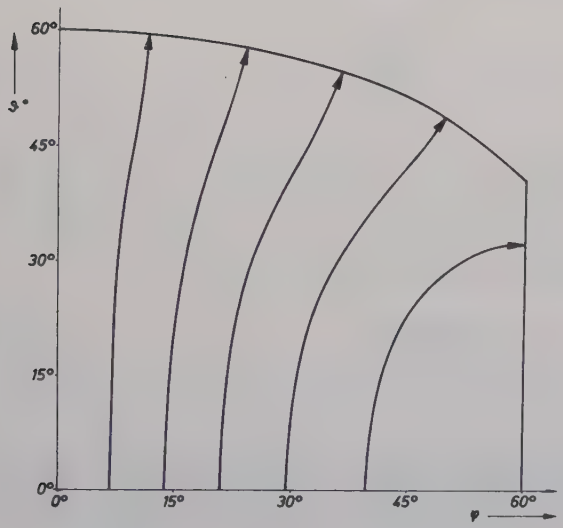


c)

Bild 3.4 Elektrisches Feld der Hauptwelle von schiedener Öffnungswinkel $\varphi_1 = \vartheta_1^*$ in



b)



d)

pyramidenförmigen Wellenleitungen ver-

einem Viertel einer Kugelsektorfläche.

(E_o sei die Amplitude der Hauptwelle). Mit größer werdenden Öffnungswinkeln wächst die Amplitude von E_φ außerhalb der E- und H-Ebene. Für $\varphi_1 = \vartheta_1^* \geq 30^\circ$ ist der maximale Betrag von E_φ/E_o in einer Fläche r = konst. größer als 0,1, und E_φ damit in vielen Fällen nicht mehr vernachlässigbar.

Den bisher bekannten Näherungen für die Feldverteilung in der Apertur von Pyramidenhörnern ist gemeinsam, daß sie vor allem für kleine Öffnungswinkel mit der Erfahrung gut übereinstimmende Ergebnisse für die Strahlungscharakteristik liefern. Im folgenden werden die verschiedenen Verfahren kurz skizziert und diskutiert:

Näherungsverfahren I: Als Apertur wird die Hornöffnung und in ihr die Feldverteilung zugrunde gelegt, wie sie die Hauptwelle der Rechteckhohlleitung mit den Seitenlängen $a = 2r \sin \varphi_1$ und $b = 2r \sin \vartheta_1^*$ besitzt ($a > b$):

$$\vec{E} \sim \vec{u}_z E_o \cos\left(\frac{\pi}{2a} y\right) e^{-jk_x x} , \tag{3.23}$$

mit

$$k_x = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2} . \tag{3.24}$$

Wegen der ebenen Phasenflächen dieser Welle ist es offensichtlich, daß das elektrische Feld der Hauptwelle einer pyramidenförmigen Wellenleitung durch Gl. (3.23) nur dann hinreichend genau beschrieben wird, wenn ϑ_1^* und φ_1 sehr klein sind. Für den Gewinn[1] ergibt sich nach diesem Verfahren

$$G = \frac{8}{\pi^2} \frac{4\pi ab}{\lambda^2} . \tag{3.25}$$

---

1) Der Gewinn einer Antenne ist definiert als das Verhältnis der einer Bezugsantenne zugeführten Leistung zu der der betrachteten Antenne, wenn bei gleichen Abständen von beiden Antennen die Feldstärke in der Hauptstrahlrichtung die gleiche ist. Üblicherweise wird der Gewinn auf den Kugelstrahler bezogen.

Näherungsverfahren II [20]: Die Amplitudenverteilung in der Öffnung wird wie in I angenommen. Der gekrümmten Phasenfront der Welle in der pyramidenförmigen Wellenleitung wird dadurch Rechnung getragen, daß der Phasenverlauf in der Öffnung des Hornes mit der Länge l durch Hinzunahme des Faktors

$$e^{-jk\Delta r} \approx e^{-jk(y^2+z^2)2r} \tag{3.26}$$

beschrieben wird (Bild 3.5). Aus Gl. (3.23) erhält man für die

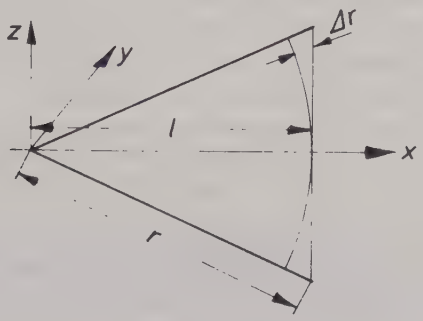


Bild 3.5

Komponenten von $\vec{E}$ in Kugelkoordinaten:

$$E_r = - E_o \cos\left(\frac{\pi}{2a} r \cos\vartheta^* \sin\varphi\right) \sin\vartheta^* \; e^{-jk_x r \cos\vartheta^* \cos\varphi} \tag{3.27}$$

$$E_{\vartheta^*} = - E_o \cos\left(\frac{\pi}{2a} r \cos\vartheta^* \sin\varphi\right) \cos\vartheta^* \; e^{-jk_x r \cos\vartheta^* \cos\varphi} \tag{3.28}$$

$$E_\varphi = 0 \; . \tag{3.29}$$

Während die Berechnung mit HSOR ergeben hatte, daß bei größeren Öffnungswinkeln φ_1, ϑ_1^* neben E_ϑ noch die φ-Komponente des elektrischen Feldes auftritt, wird E_φ auch bei diesem Näherungsverfahren stets vernachlässigt. Bei der Integration über die Öffnung des Pyramidenhorns zur Berechnung des Richtdiagramms treten wegen Gl. (3.26) Fresnelsche Integrale auf. Obwohl diese tabelliert vorliegen, ist die Berechnung des E- und H-Diagramms[1]

1) Unter dem E- oder H-Diagramm einer Antenne versteht man die Richtcharakteristik (s.S. 5) einer linear polarisiert gespeisten Antenne in der durch die Hauptstrahlrichtung und den elektrischen oder magnetischen Feldvektor definierten Ebene. Bei einer Antenne mit zwei senkrecht aufeinander stehenden Symmetrieebenen sind E- oder H-Diagramm identisch mit dem Richtdiagramm in der E- oder H-Ebene.

derart aufwendig, daß ihr keine praktische Bedeutung zukommt. Dagegen ist die Bestimmung des Gewinns in Abhängigkeit von den Abmessungen mit vorliegenden Tabellen [21] sehr einfach möglich.

Näherungsverfahren III: Die pyramidenförmige Wellenleitung unterscheidet sich von der kugelsektorförmigen nur dadurch, daß die obere und untere Wand eben sind. Deshalb wird in [22] vorgeschlagen, zur Berechnung der Feldverteilung in der pyramidenförmigen Wellenleitung von der der kugelsektorförmigen auszugehen, die durch Separation der Wellengleichung analytisch bestimmt werden kann. Wie in [22] ebenfalls ausgeführt wird, lautet die Gleichung für das Potential Π_H

$$\Pi_H = C_H\left[P_\nu^q(\cos\vartheta) + C_1 Q_\nu^q(\cos\vartheta)\right]\left\{\begin{matrix}\sin q\varphi\\ \cos q\varphi\end{matrix}\right\} H^{(2)}_{\nu+1/2}(kr)\sqrt{kr}. \quad (3.30)$$

In dieser Gleichung bedeuten $P_\nu^q(\cos\vartheta)$ und $Q_\nu^q(\cos\vartheta)$ die zugeordneten Legendreschen Funktionen erster und zweiter Art. C_1 ist eine Integrationskonstante. Für kleine Winkel ϑ^* wird

$$P_\nu^q(\cos\vartheta) + C_1 Q_\nu^q(\cos\vartheta) \sim \left\{\begin{matrix}\sin\frac{n\pi}{2\vartheta_1^*}\vartheta^*\\ \cos\frac{n\pi}{2\vartheta_1^*}\vartheta^*\end{matrix}\right\}, \quad n = 1,2,3, \ldots . \quad (3.31)$$

Dann gilt nach [22] für den Eigenwert die Beziehung

$$\nu(\nu+1) \approx \left(\frac{m\pi}{2\varphi_1}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2\vartheta_1^*}\right)^2, \quad m = 1,2,3, \ldots , \quad (3.32)$$

die dem für die Rechteckhohlleitung bekannten Ausdruck

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

entspricht. Im Fall mittlerer und großer Öffnungswinkel ergibt sich bei der Auswertung von Gl. (3.30) wie bei der kegelförmigen Wellenleitung die Schwierigkeit, daß die Berechnung der zugeordneten Legendreschen Funktionen uber die Reihen- oder

Integraldarstellungen außer in wenigen Sonderfällen sehr umfangreich ist. Um dennoch ohne großen Aufwand die Feldverteilung der Hauptwelle der kugelsektorförmigen Wellenleitung zu erhalten und so zu einem Vergleich mit der in der pyramidenförmigen Wellenleitung zu kommen, wurde die Berechnung auch mit HSOR durchgeführt. Bild 3.6 zeigt als Beispiel das elektrische Feld in einer Fläche r = konst. einer Wellenleitung mit $\vartheta_1^* = \varphi_1 = 60^\circ$. Zusätzlich wurden gestrichelt die in Bild 3.4d dargestellten Feldlinien eingezeichnet. Man erkennt, daß die Feldverteilungen in pyramiden- und kugelsektorförmiger Wellenleitung auch für große Öffnungswinkel ϑ_1^*, φ_1 sehr ähnlich sind und sich nur in der Umgebung der Kanten unterscheiden. Dennoch hat dieses Näherungsverfahren wegen der bereits erwähnten aufwendigen Auswertung wenig praktische Bedeutung erlangt.

Neben den bisher bekannten Näherungsverfahren zur Berechnung des Strahlungsverhaltens von Pyramidenhörnern wird noch ein weiteres angegeben. Dazu wird das dem Pyramidenhorn angepaßte Koordinatensystem r, δ, φ mit den Grundvektoren $\vec{a}_r$, $\vec{a}_\delta$ und $\vec{a}_\varphi$ eingeführt, bei dem die Flächen $\delta = \pm \delta_1$ und $\varphi = \pm \varphi_1$ mit den Berandungsflächen des Hornes identisch sind. Für ein solches Koordinatensystem besteht mit kartesischen Koordinaten x, y, z der Zusammenhang (s. Bild 3.7)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ,$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{und} \tag{3.33}$$

$$\delta = -\arctan \frac{z}{x}\ .$$

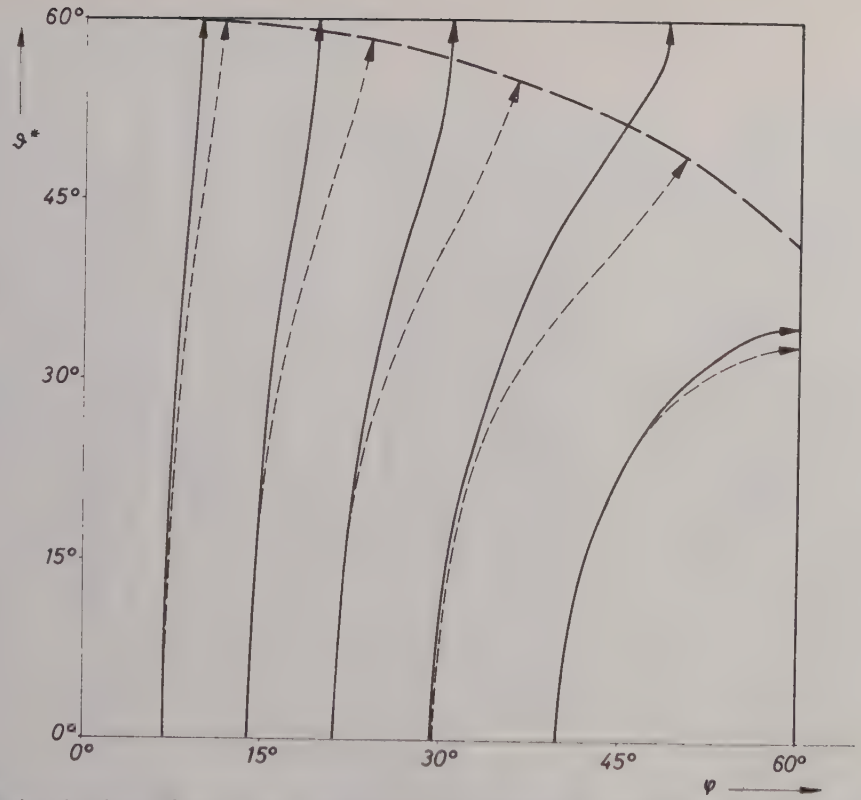


Bild 3.6 Elektrisches Feld der Hauptwelle einer kugelsektorförmigen (——) und einer pyramidenförmigen (-----) Wellenleitung in einem Viertel einer Kugelsektorfläche. Öffnungswinkel $\varphi_1 = \vartheta_1^* = 60°$

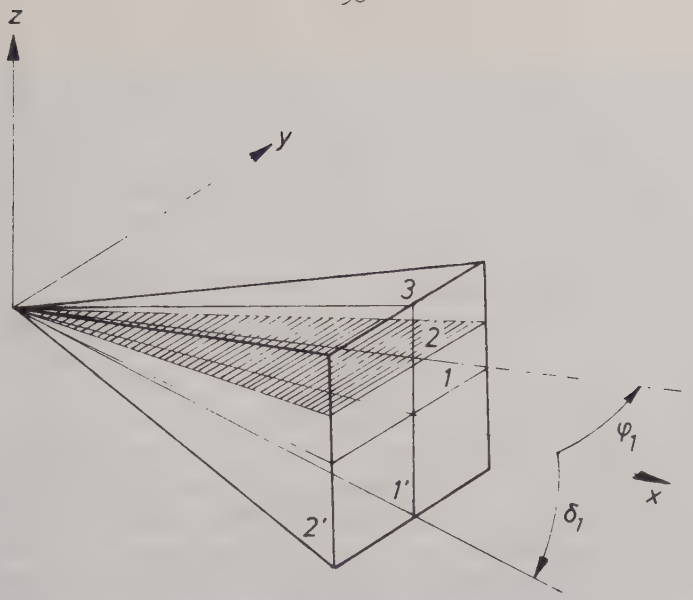


Bild 3.7 Pyramidenflächen δ = konst. = 1,2,3
Pyramidenflächen φ = konst. = 1', 2'

Die Phasenflächen der Welle seien Kugelflächen, auf denen das elektrische Feld durch die Gleichung

$$\vec{E} = \vec{a}_\delta E_0 \cos\left(\frac{\pi}{2\varphi_1}\varphi\right) \frac{g(r)}{r} \tag{3.34}$$

beschrieben werde. Dieses Feld erfüllt die Randbedingung $E_{tan} = 0$ auf den Wänden $\varphi = \pm \varphi_1$, jedoch nicht auf den Wänden $\delta = \pm \delta_1$. In r, ϑ, φ-Koordinaten hat es die Form

$$\vec{E} = E_0\left[\vec{u}_{\vartheta^*}\cos\left(\frac{\pi}{2\varphi_1}\varphi\right) + \vec{u}_\varphi \tan\varphi \sin\vartheta^* \cos\left(\frac{\pi}{2\varphi_1}\varphi\right)\right] \frac{g(r)}{r} . \tag{3.35}$$

Das aus dieser Gleichung sich ergebende Feldlinienbild für ein Horn mit $\varphi_1 = \vartheta_1^* = 60^\circ$ ist in Bild 3.8 dargestellt. Durch Vergleich mit den ebenfalls eingezeichneten Feldlinien nach Bild 3.4d erkennt man, daß die Übereinstimmung mit dem mit HSOR ermittelten Feldlinienbild für die pyramidenförmige Wellenleitung

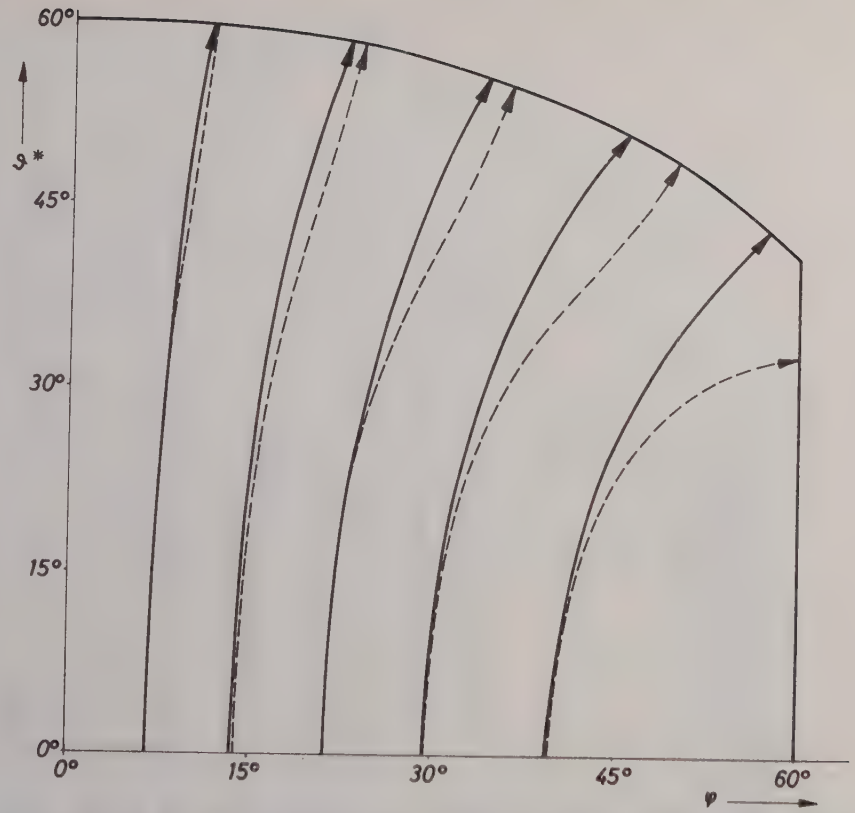


Bild 3.8 Elektrisches Feld der Hauptwelle einer pyramidenförmigen Wellenleitung nach Näherungsverfahren IV (----) und exakt (——) in einem Viertel einer Kugelsektorfläche. Öffnungswinkel $\varphi_1 = \vartheta_1^* = 60°$

auch bei großen Öffnungswinkeln sehr gut ist. Bei der späteren Berechnung des Fernfeldes wird als Apertur die der Hornöffnung zugeordnete Kugelsektorfläche und für das E-Feld der Verlauf entsprechend Gl. (3.35) angenommen. Die Komponenten des H-Feldes in der Apertur werden $H_\varphi \approx -\frac{1}{Z_H} E_\vartheta$ und $H_\vartheta \approx \frac{1}{Z_H} E_\varphi$ gesetzt, wobei Z_H der Wellenwiderstand der Hauptwelle einer Rechteckhohlleitung ist, deren Querschnitt gleich der Öffnungsfläche des Pyramidenhorns ist. Dieses, auf der Gl. (3.34) bzw. (3.35) basierende Verfahren, soll im folgenden mit Näherungsverfahren IV bezeichnet werden.

Berechnet man mit den Aperturfeldverteilungen aller bisher diskutierten Methoden das Fernfeld, dann lassen sich die Unterschiede in den Ergebnissen besonders gut durch den Vergleich des Gewinns feststellen. Da der Grad der Übereinstimmung der verschiedenen Verfahren in erster Linie von der Größe der Öffnungswinkel abhängt, wird dieser variiert und dabei die Länge der berechneten Pyramidenhörner jeweils so gewählt, daß die Öffnungsfläche in allen Fällen gleich groß ist und damit nicht als zusatzliche Veränderliche in das Ergebnis eingeht. Tabelle 3.2 zeigt die berechneten Gewinne für Hörner mit quadratischer Öffnungsfläche und einer Kantenlänge von 3,47 λ_0. Bei der Diskussion der Ergebnisse muß berücksichtigt werden, daß bei der Berechnung des Gewinns mit HSOR ein Fehler von ± 2 % auftreten kann (siehe S. 26). Mit diesem Fehler liefert die Berechnung über die Kugelsektorhörner (Näherungsverfahren III) noch bei $\varphi_1 = \vartheta_1^* = 30^\circ$ brauchbare Werte, während bei dem bisher in der Praxis meist verwendeten Verfahren II bei diesen Öffnungswinkeln schon größere Fehler auftreten. Das hier vorgeschlagene Näherungsverfahren IV dagegen, das auf den sehr einfach auswertbaren Gleichungen (3.34) und (3.35) basiert, ergibt selbst bei Öffnungswinkeln $\vartheta_1^* = \varphi_1$ von 50° noch gute Ergebnisse.

Tab. 3.2 Mit HSOR und den Näherungsverfahren I bis IV berechnete Gewinne von Pyramiden- und Kugelsektorhörnern verschiedener Öffnungswinkel und Länge bei konstanter Öffnungsfläche von $(3{,}47\ \lambda_0)^2$

$\varphi_1 = \vartheta_1^*$	Länge l/λ	Pyramidenhorn (HSOR)	Näherungsverfahren I	Näherungsverfahren II	Näherungsverfahren III		Näherungsverfahren IV
					Kugelsektorhorn H_{10}-Welle	Kugelsektorhorn H_{01}-Welle	
10°	9,85	109,04	126,66	109,06	108,08	108,98	108,75
20°	4,77	75,75	"	77,34	74,95	75,10	75,50
30°	3,01	42,76	"	45,23	41,13	41,94	42,67
40°	2,07	20,69	"	23,35	18,84	19,29	20,23
50°	1,46	9,47	"	11,75	8,22	8,48	9,79
60°	1,00	8,16	"	6,59	7,28	7,66	8,67

In Bild 3.9 sind die E- Diagramme, in Bild 3.10 die H-Diagramme einiger Pyramidenhörner dargestellt, wobei der Berechnung die mit HSOR ermittelten Feldverteilungen zugrunde gelegt wurden. Die Bestimmung der entsprechenden Diagramme mit den Näherungsverfahren III und IV[1] ergab, daß alle drei Verfahren sehr ähnliche Kurvenverläufe liefern. Die Unterschiede sind im Winkelbereich $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ bzw. $-90^\circ \leq \vartheta^* \leq 90^\circ$ kleiner als 2 % für Hörner, deren Öffnungswinkel in beiden Ebenen bis zu 60° groß sind.

3.3.2 Hornstrahler für Zirkularpolarisation

In der Richtfunk- und Radartechnik benötigt man häufig Antennen, die gleichzeitig mit horizontaler und vertikaler oder mit Zirkularpolarisation betrieben werden können. In der Regel werden in diesen Fällen rotationssymmetrische Spiegelantennen mit geeigneten Primärstrahlern benutzt. Die bisherige Entwicklung von Hornstrahlern mit bestimmten vorgeschriebenen Strahlungsdiagrammen, also auch von rotationssymmetrischen, beruht auf drei verschiedenen Prinzipien [23]:

a) Beeinflussung des Strahlungsverhaltens durch metallische oder dielektrische Einsätze oder durch das Anbringen von Nebentrichtern (z.B. [24]),

b) Änderung der Berandungsform des Hornstrahlers [25], [26],

c) Verwendung von Hornantennen mit anisotropen Wandimpedanzen.

Auf das zuletzt genannte Verfahren wird im Abschnitt 4 noch ausführlich eingegangen. Die Realisierung nach den beiden anderen Methoden war bisher meist nur mit Hilfe eines großen experimentellen Aufwandes durchführbar. Am praktisch wichtigen Problem eines Hornstrahlers für Zirkularpolarisation wird im folgenden gezeigt, daß bei Anwendung des Verfahrens b) das Rechenprogramm HSOR das Auffinden einer geeigneten Hornform ermöglicht.

---

1) Entsprechende, nach dem Näherungsverfahren II berechnete Diagramme, werden in der Literatur nicht angegeben.

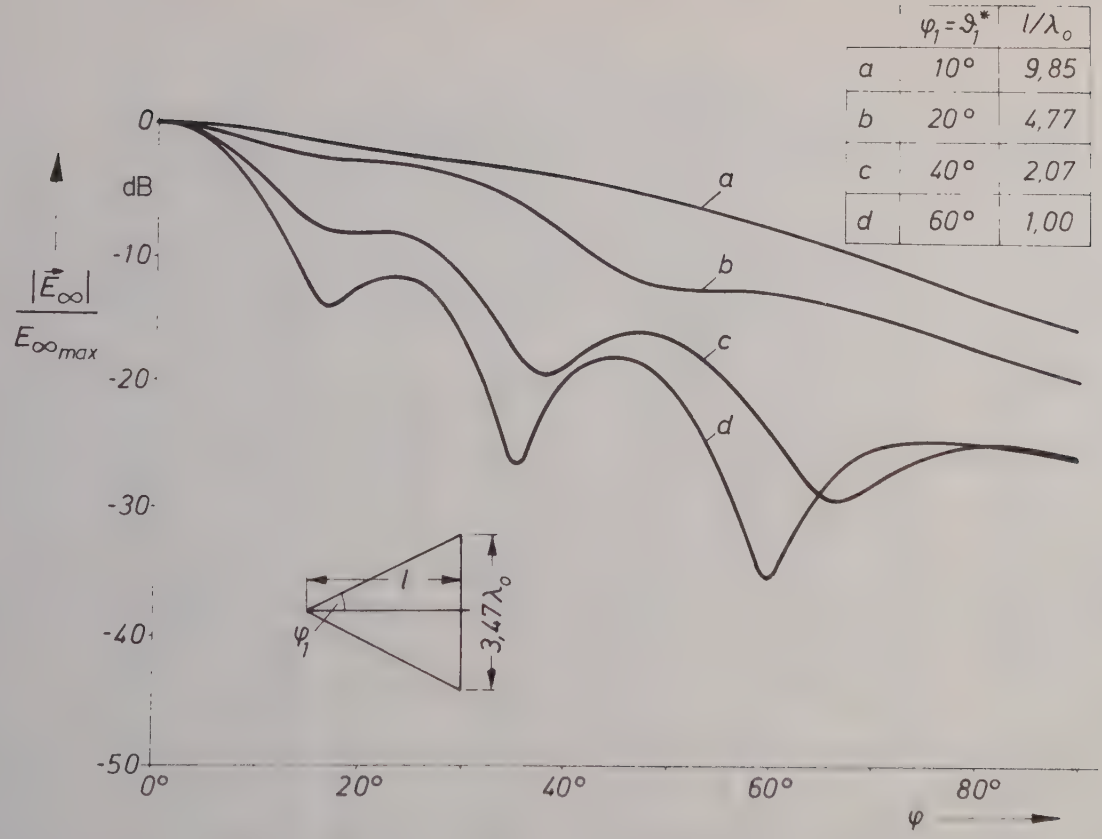
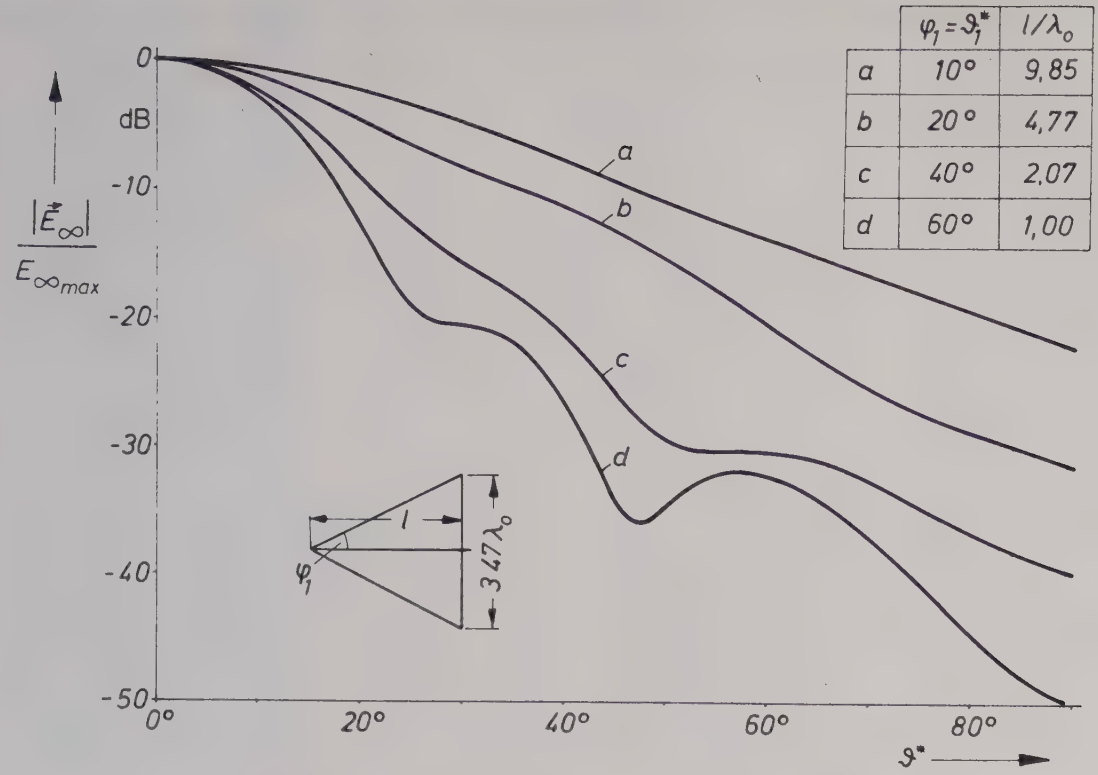


Bild 3.9 E-Diagramme von Pyramidenhörnern verschiedener Öffnungswinkel bei konstanter quadratischer Öffnungsfläche



	$\varphi_1 = \vartheta_1^*$	l/λ_0
a	10°	9,85
b	20°	4,77
c	40°	2,07
d	60°	1,00

Bild 3.10 H-Diagramme von Pyramidenhörnern verschiedener Öffnungswinkel bei konstanter quadratischer Öffnungsfläche

Die Richtcharakteristik einer Antenne für Zirkularpolarisation soll im Idealfall unabhängig von der Lage des E-Vektors in der Apertur sein. In der Praxis beschränkt man sich meist auf die Forderung, daß die Hauptkeulen des E- und H-Diagramms für zwei senkrecht aufeinander stehende Polarisationsrichtungen gleich sind. Ein Pyramidenhorn selbst mit quadratischer Öffnungsfläche, in dem nur die Hauptwelle angeregt wird, besitzt diese Eigenschaft nicht. Der Unterschied zwischen dem E- und H-Diagramm läßt sich jedoch durch Abrunden der Ecken verringern. Die entstehenden Berandungsformen lassen sich mit dem in Bild 3.11 erläuterten

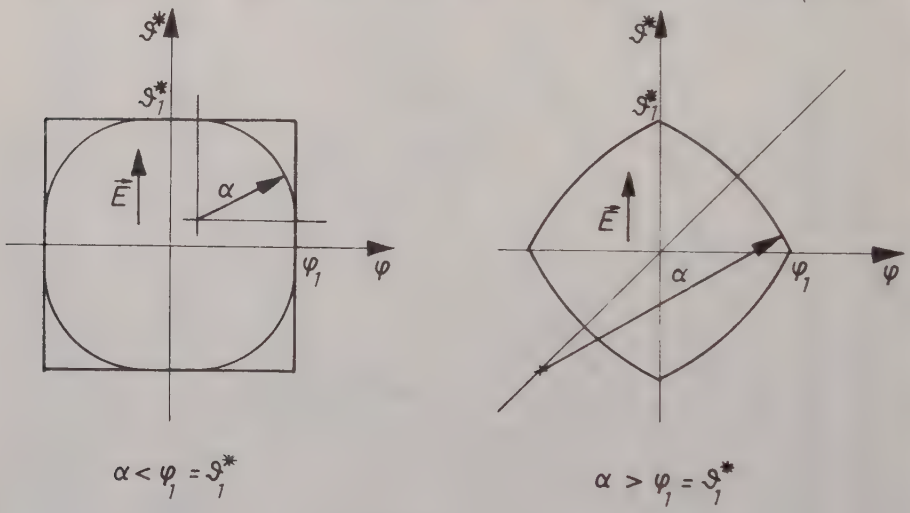


Bild 3.11

Parameter α beschreiben. Das Strahlungsverhalten von Hornstrahlern wurde für verschiedene Werte von α $(0 \leq \alpha \leq \infty)$ und der Öffnungswinkel $\varphi_1 = \vartheta_1^*$ $(0 \leq \varphi_1 \leq 90^\circ)$ berechnet. Im Grenzfall $\alpha = 0$ hat man die bisher behandelten Pyramidenhörner mit quadratischer Öffnungsfläche, für $\alpha \to \infty$ ergibt sich ebenfalls eine quadratische Öffnung der halben Fläche, wobei der E-Vektor parallel zur Diagonalen liegt. Die Länge l der verschiedenen untersuchten Hörner wurde jeweils so gewählt, daß diese im Grenzfall $\alpha = 0$ alle dieselbe Öffnungsflache von wiederum $(3{,}47\ \lambda_0)^2$ haben.

Es wird zunächst das Verhalten bei kleinen Öffnungswinkeln untersucht. Für $\varphi_1 = \vartheta_1^* = 5^\circ$ ergibt die Rechnung eine weitgehende Übereinstimmung zwischen E- und H-Diagramm für $\alpha = 3{,}9\ \varphi_1$. Für kleine Öffnungswinkel erhält man also das gewünschte Verhalten bei nahezu ebenen Berandungsflächen, was sich mit den Ergebnissen in [27] deckt. Dort wird nämlich das Strahlungsverhalten einer offenen Rechteckhohlleitung von quadratischem Querschnitt ($\alpha = \infty$) untersucht, in der durch Überlagerung einer H_{10}- mit einer H_{01}-Welle ein Feld angeregt wird, dessen E-Vektor parallel zur Diagonalen der Hohlleitungsöffnung liegt. Es ergibt sich, daß E- und H-Diagramm dieser Hohlleitungsstruktur gleich sind.

Damit die Hauptkeulen von E- und H-Diagramm auch bei größeren Öffnungswinkeln möglichst gut übereinstimmen, müssen die Berandungsflächen des Hornes stärker gekrümmt werden. Bei Öffnungswinkeln im Bereich $0 \leq \varphi_1 \leq 30^\circ$ beträgt für $\alpha = 0$ die Breite der Hauptkeule in der E-Ebene ca. 16°, in der H-Ebene etwa 25°. Der Parameter α wurde deshalb mit Hilfe von HSOR so bestimmt, daß das Integral über die Differenz zwischen E- und H-Diagramm im Bereich 0° bis 25° minimal wird. Man erhält als günstigste Werte für α in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel:

Tabelle 3.3

$\varphi_1 = \vartheta_1^*$	$1/\lambda_0$	α/φ_1	Gewinn
5°	19,85	3,9	68,42
10°	9,85	2,7	68,79
20°	4,77	2,3	66,30
30°	3,01	2,1	56,21

Als Beispiel für die Veränderung des Strahlungsverhaltens in Abhängigkeit von α ist in den Bildern 3.12 - 3.14 das E- und H-Diagramm eines Hornes mit $\varphi_1 = \vartheta_1^* = 20^\circ$ für $\alpha = 0$ (Pyramidenhorn), $\alpha = \varphi_1$ (Kegelhorn) und $\alpha = 2{,}3\ \varphi_1$ dargestellt. Man erkennt, daß

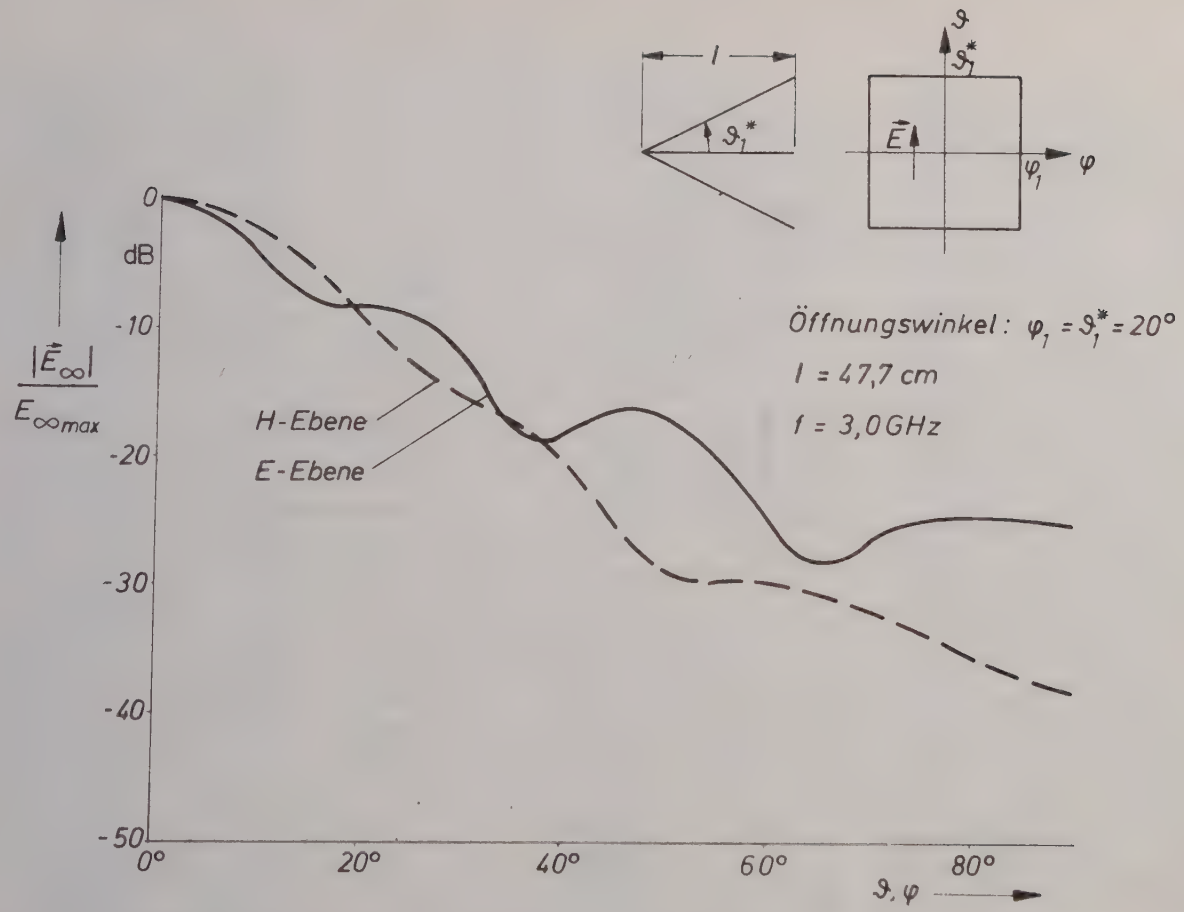


Bild 3.12 Richtdiagramm eines Pyramidenhorns mit vollkommen leitenden Wänden

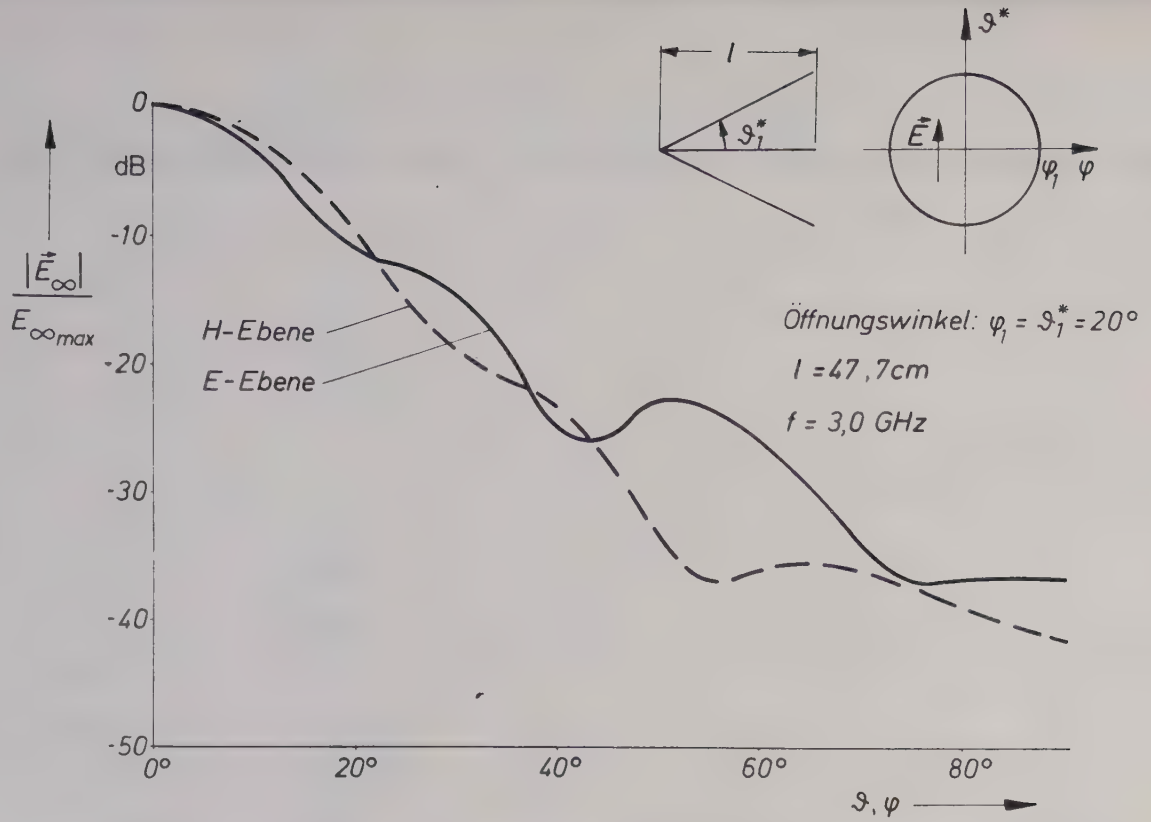


Bild 3.13 Richtdiagramm eines Kegelhornes mit vollkommen leitenden Wänden

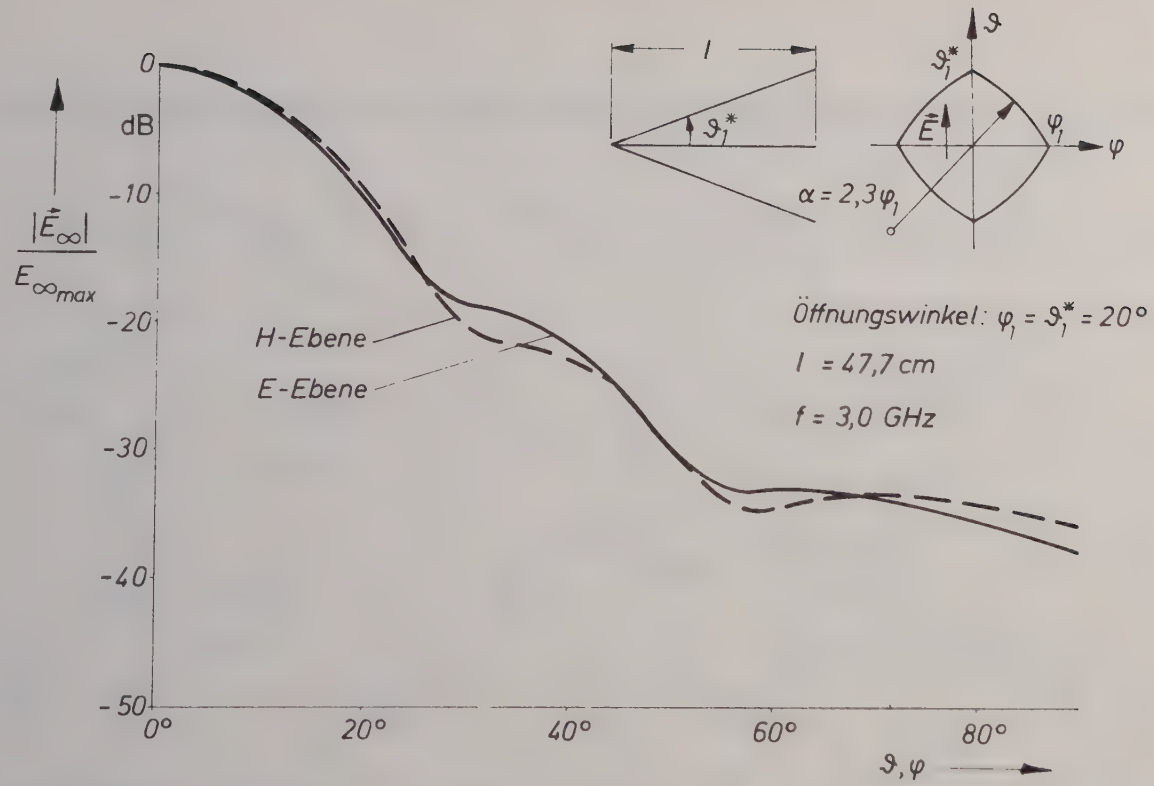


Bild 3.14 Richtdiagramm eines Hornstrahlers mit vollkommen leitenden Wänden für Zirkularpolarisation

für $\alpha = 2{,}3\ \varphi_1$ die Hauptkeule in der H- und E-Ebene nahezu die gleiche Form hat. Die Nebenzipfeldämpfung, die mit ca. 18 dB günstiger als beim Pyramidenhorn ist, ist ebenfalls in beiden Ebenen nahezu gleich.

Eine weitere technisch wichtige Größe zur Charakterisierung des Strahlungsverhaltens von Antennen ist der Flächenwirkungsgrad q_F, der sich aus dem Gewinn über die Beziehung

$$q_F = \frac{\lambda^2}{4\pi} \frac{G}{F_H}$$

ergibt, wobei F_H die Öffnungsfläche des Hornstrahlers ist. Der Wert von q_F unterscheidet sich für Hornstrahler mit kleinen Öffnungswinkeln nicht wesentlich von dem der entsprechenden zylindrischen Hohlleitung. Für $\alpha = 0$ wird mit $\vartheta_1^* = \varphi_1 \to 0$ aus dem nur die Hauptwelle führenden Pyramidenhorn eine offene Hohlleitung mit quadratischem Querschnitt, in der die H_{10}-Welle angeregt ist und für die $q_F = 0{,}81$ gefunden wird. Der Flächenwirkungsgrad der Hohlleitung, die mit $\alpha \to \infty$ entsteht, (quadratischer Querschnitt, $\vec{E} \parallel$ Diagonale) ist ebenfalls gleich 0,81 [27]. Ferner ist für die offene Rundhohlleitung $q_F \approx 0{,}83$. Der Flächenwirkungsgrad liegt daher bei Hornstrahlern mit kleinen Öffnungswinkeln für alle hier betrachteten Berandungsformen (Bild 3.11, $0 \leq \alpha \leq \infty$) etwa zwischen 0,81 und 0,83. Anhand des in der Tabelle 3.3 ebenfalls angegebenen Gewinns erkennt man, daß mit größer werdenden Öffnungswinkeln der Gewinn und damit auch der Flächenwirkungsgrad abnehmen. Wesentliche Ursache dafür ist die bei konstanter Öffnungsfläche mit zunehmenden Öffnungswinkeln wachsende Abweichung von der gleichphasigen Ausleuchtung der Hornöffnung.

4. Kugelsektorhörner mit von Null verschiedener Wandimpedanz

4.1 Bedingungen für die Anwendbarkeit des Produktansatzes $f_1(\vartheta)f_2(\varphi)g(r)$

4.1.1 E- und H-Wellen verkoppelt

Im Abschnitt 2.2.3.2 war gezeigt worden, daß die beiden aus den Potentialen Π_E und Π_H abgeleiteten Anteile nur dann eine Welle bilden, wenn die Gl. (2.55) erfüllt ist. Dies ist näherungsweise in zwei Fällen möglich, nämlich

1. für den Wertebereich von kr, für den die Lösung (2.18) durch Gl. (2.20) angenähert werden kann. In diesem Fall ist für die nach außen laufende Welle $g(r) \sim e^{-jkr}$, und durch Vergleich von Gl. (2.21) und (2.55) ergibt sich $C_g = 1$.

2. bei der Berechnung von g(r) für ein Stück einer trichterförmigen Wellenleitung der Länge l_w unter der Voraussetzung, daß $l_w \ll r_o$ (Bild 4.1) ist und r in dem Bereich

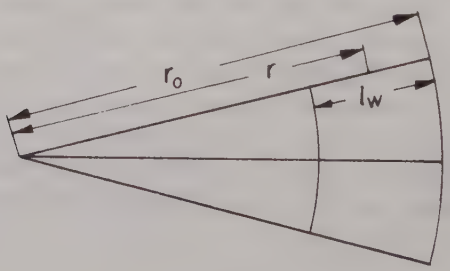


Bild 4.1

$r_o - l_w \leq r \leq r_o$ ungefähr gleich r_o gesetzt werden kann. Aus der Differentialgleichung (2.16) für g(r) wird damit für diesen Bereich

$$\frac{d^2g(r)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{r_o^2}\right)g(r) = 0 \,, \qquad (4.1)$$

woraus sich die Lösung

$$g(r) = e^{\pm jkr\sqrt{1 - \frac{\nu(\nu+1)}{(kr_o)^2}}} \qquad (4.2)$$

ergibt. In dieser Näherung ist also Gl. (2.55) erfüllt und

$$c_g = \sqrt{1 - \frac{\nu(\nu+1)}{(kr_o)^2}} \qquad (4.3)$$

für die nach außen laufende Welle.

Die bei Anwendung des Ansatzes (2.13) sich ergebende allgemeine Lösung für die nach außen laufende Welle wird durch das 2. Glied in Gl. (2.18) beschrieben. Um beurteilen zu können, welche Abweichungen von dem in Gl. (2.55) geforderten konstanten Verlauf von $\frac{dg(r)}{dr} / g(r)$ auftreten, werden in Bild 4.2 Kurven

$$\mathrm{Im}\left[\frac{d}{dr}\left(\sqrt{kr}\, H^{(2)}_{\nu+1/2}(kr)\right) / \sqrt{kr}\, H^{(2)}_{\nu+1/2}(kr)\right] = \text{konst.} \qquad (4.4)$$

und

$$\frac{\mathrm{Re}\left[\frac{d}{dr}\left(\sqrt{kr}\, H^{(2)}_{\nu+1/2}(kr)\right) / \sqrt{kr}\, H^{(2)}_{\nu+1/2}(kr)\right]}{\mathrm{Im}\left[\frac{d}{dr}\left(\sqrt{kr}\, H^{(2)}_{\nu+1/2}(kr)\right) / \sqrt{kr}\, H^{(2)}_{\nu+1/2}(kr)\right]} = \text{konst.}^{1)} \qquad (4.5)$$

in Abhängigkeit von kr und ν dargestellt, deren Aussagen durch ein Beispiel erläutert werden soll, in dem $\nu = 22{,}5$ sei. Für $r_o/\lambda = 8{,}2$ und damit $kr_o = 51{,}5$ ist nach Bild 4.2 $\mathrm{Im}\left(\frac{dg(r)}{dr} / g(r)\right) = 0{,}9$. Wählt man die Länge $l_w = 2\lambda$, dann ergibt sich bei $(r_o - l_w)/\lambda = 6{,}2$ oder $k(r-l_w) = 38{,}9$ für $\mathrm{Im}\left(\frac{dg(r)}{dr} / g(r)\right) = 0{,}81$. Der Wert des Imaginärteils ändert sich also in dem Bereich $(r_o - l_w) \le r \le r_o$ um 10 %. Der Realteil ist in dem Bereich weniger als 1 % des Imaginärteils und deshalb vernachlässigbar. Bei einem kleineren Ausgangswert $r_o/\lambda = 5{,}0$ ($kr_o = 31{,}5$) und wiederum $l_w/\lambda = 2$ ändert sich indessen $\frac{dg(r)}{dr} / g(r)$ erwartungsgemäß wesentlich stärker, nämlich vom Wert 0,7 (0,03 + j) auf den Wert 0,2 (1,45 + j).

1) Die Division des Realteils durch den Imaginärteil erweist sich für die weitere Darstellung (s.S. 58) als zweckmäßig.

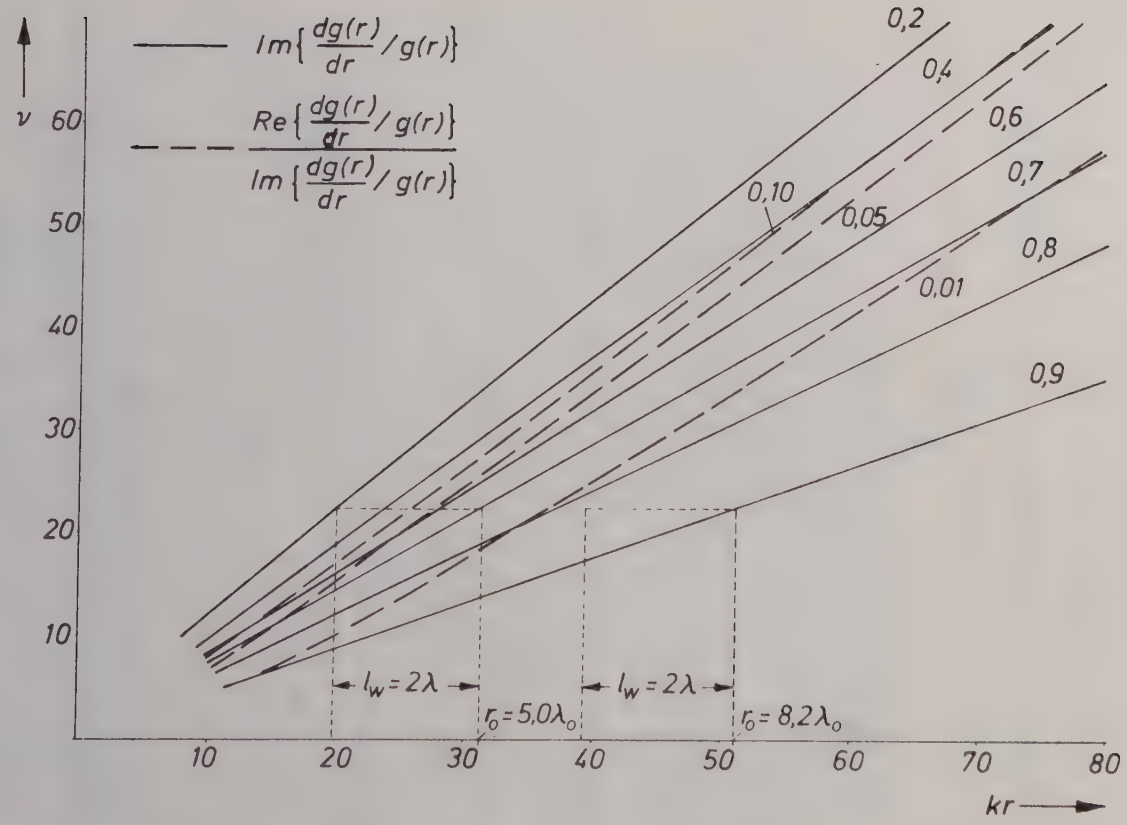


Bild 4.2 Verlauf von $\frac{dg(r)}{dr} / g(r)$ in Abhängigkeit von kr und ν

Weiter wird im folgenden untersucht, welche Bedingungen zusätzlich erfüllt sein müssen, damit auch die Feldverteilung in Flächen r = konst. in der Form

$$f(\varphi,\vartheta) = f_1(\varphi)f_2(\vartheta) \tag{4.6}$$

dargestellt werden kann. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2.17) in Produktform lautet entsprechend Gl. (3.30)

$$f(\vartheta,\varphi) = C\, K_\nu^q(\cos\vartheta)\begin{Bmatrix}\sin q\varphi\\ \cos q\varphi\end{Bmatrix}, \tag{4.7}$$

wobei zur Abkürzung

$$K_\nu^q(\cos\vartheta) = P_\nu^q(\cos\vartheta) + C_1 Q_\nu^q(\cos\vartheta) \tag{4.8}$$

gesetzt wurde. Gln. (4.7) müssen noch die Randbedingungen an den Wänden des Horns erfüllen. Mit

$$f_E = C_E K_{\nu E}^q(\cos\vartheta)\begin{Bmatrix}\sin q\varphi\\ \cos q\varphi\end{Bmatrix} \tag{4.9}$$

und

$$f_H = C_H K_{\nu H}^q(\cos\vartheta)\begin{Bmatrix}\cos q\varphi\\ \sin q\varphi\end{Bmatrix}^{1)} \tag{4.10}$$

erhält man aus den Gln. (2.54) bis (2.57)

an der Wand $\vartheta^* = \vartheta_1^*$

$$\frac{jkrZ_{r\varphi}}{Z} = \frac{\nu(\nu+1)\, K_{\nu E}^q(\cos\vartheta_1)}{Z\,\frac{C_H}{C_E}\, C_g\, \frac{\pm q}{\sin\vartheta_1} K_{\nu H}^q(\cos\vartheta_1) - \frac{\partial}{\partial\vartheta} K_{\nu E}^q(\cos\vartheta_1)}, \tag{4.11}$$

$$\frac{jkr\,Z}{Z_{\varphi r}} = -\frac{Z\,\frac{C_H}{C_E}\,\nu(\nu+1)\, K_{\nu H}^q(\cos\vartheta_1)}{C_g\,\frac{\pm q}{\sin\vartheta_1} K_{\nu E}^q(\cos\vartheta_1) + Z\,\frac{C_H}{C_E}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta} K_{\nu H}^q(\cos\vartheta_1)}, \tag{4.12}$$

---

1) C_E hat die Dimension Vm, C_H die Dimension Am, s. Fußnote S.8

an der Wand $\varphi = \varphi_1$

$$\frac{jkrZ_{r\vartheta}}{Z} = \frac{\nu(\nu+1)\, K^q_{\nu E}(\cos\vartheta)}{\frac{\pm q}{\sin\vartheta} K^q_{\nu E}(\cos\vartheta) + Z \frac{C_H}{C_E} C_g \frac{\partial}{\partial\vartheta} K^q_{\nu H}(\cos\vartheta)} \begin{Bmatrix} \tan q\varphi_1 \\ \cot q\varphi_1 \end{Bmatrix}, \quad (4.13)$$

$$\frac{jkr\, Z}{Z_{\vartheta r}} = \frac{\nu(\nu+1)\, Z \frac{C_H}{C_E} K^q_{\nu H}(\cos\vartheta)}{Z \frac{C_H}{C_E} \frac{\pm q}{\sin\vartheta} K^q_{\nu H}(\cos\vartheta) + C_g \frac{\partial}{\partial\vartheta} K^q_{\nu E}(\cos\vartheta)} \begin{Bmatrix} \cot q\varphi_1 \\ \tan q\varphi_1 \end{Bmatrix}. \quad (4.14)$$

In diesen Gleichungen gehört wie in allen folgenden das obere Vorzeichen von q zum Ansatz $f_E \sim \sin q\varphi$, $f_H \sim \cos q\varphi$, das untere Vorzeichen zum Ansatz $f_E \sim \cos q\varphi$, $f_H \sim \sin q\varphi$. Aus Gln. (4.13) und (4.14) folgt, daß $Z_{r\vartheta}$ und $Z_{\vartheta r}$ auf den Wänden $\varphi = \varphi_1$ bzw. $\varphi = -\varphi_1$ Funktionen von ϑ sein müssen, damit Gl. (4.7) Lösungen des Randwertproblems sind. $Z_{r\varphi}$ und $Z_{\varphi r}$ dagegen müssen auf den Wänden $\vartheta^* = \pm \vartheta^*_1$ konstant sein.

Die Lösungen (4.9) und (4.10) sind bis auf den Amplitudenfaktor C_E vollständig bestimmt, wenn ν, q und C_H bekannt sind. Da sich aus den Randbedingungen vier Bedingungsgleichungen ergeben, ist das Gleichungssystem (4.11) bis (4.14) überbestimmt. Bei Anwendung des Produktansatzes (4.6) können daher nur drei der vier Wandimpedanzen vorgegeben werden. Ein Verfahren zur Berechnung von Kugelsektorhörnern, bei denen alle vier Wandimpedanzen vorgegeben sind, wird im Abschnitt 4.2 beschrieben.

Stark vereinfachen lassen sich Gln. (4.11) bis (4.14), wenn der Öffnungswinkel ϑ^*_1 klein ist. Dann können

$$\sin\vartheta \approx 1 ,$$

nach Gl. (3.31)

$$K^q_{\nu E}(\cos\vartheta) \approx \begin{Bmatrix} \sin p\vartheta^*_1 \\ \cos p\vartheta^*_1 \end{Bmatrix}, \qquad K^q_{\nu H}(\cos\vartheta) \approx \begin{Bmatrix} \cos p\vartheta^*_1 \\ \sin p\vartheta^*_1 \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

und nach Gl. (3.32)

$$\nu(\nu+1) = p^2 + q^2 \tag{4.16}$$

gesetzt werden. Damit werden aus Gln. (4.11) - (4.14)

$$\frac{jkrZ_{r\varphi}}{Z} = \frac{p^2 + q^2}{\frac{C_H}{C_E} Z\, C_g\,(\pm q) + (\pm p)} \begin{Bmatrix} \tan p\vartheta_1^* \\ \cot p\vartheta_1^* \end{Bmatrix}, \tag{4.17}$$

$$\frac{jkr\, Z}{Z_{\varphi r}} = \frac{p^2 + q^2}{C_g\,(\pm q) - \frac{C_H}{C_E} Z\,(\pm p)} \begin{Bmatrix} \cot p\vartheta_1^* \\ \tan p\vartheta_1^* \end{Bmatrix}, \tag{4.18}$$

$$\frac{jkrZ_{r\vartheta}}{Z} = \frac{p^2 + q^2}{(\pm q) - \frac{C_H}{C_E} Z\, C_g\,(\pm p)} \begin{Bmatrix} \tan q\varphi_1 \\ \cot q\varphi_1 \end{Bmatrix}, \tag{4.19}$$

$$\frac{jkr\, Z}{Z_{\vartheta r}} = \frac{-\frac{C_H}{C_E} Z\,(p^2 + q^2)}{\frac{C_H}{C_E} Z\,(\pm q) + C_g\,(\pm p)} \begin{Bmatrix} \cot q\varphi_1 \\ \tan q\varphi_1 \end{Bmatrix}. \tag{4.20}$$

Wenn $g(r) \sim e^{-jkr}$ und damit $C_g = 1$ sind, findet man nach Multiplikation von Gl. (4.17) mit (4.18) und Gl. (4.19) mit (4.20), daß

$$Z_{r\vartheta}Z_{\varphi r} + Z_{\vartheta r}Z_{r\varphi} = 0 \tag{4.21}$$

sein muß, damit Gln. (4.17) - (4.20) erfüllt sind. Wenn neben ϑ_1^* auch noch φ_1 sehr klein wird, geht die kugelsektorförmige Wellenleitung in eine Rechteckhohlleitung über. Für diese müssen die Wandimpedanzen der Gleichung

$$Z_{xz}Z_{yx} + Z_{zx}Z_{xy} - Z_{xy}Z_{xz} = 0 \tag{4.22}$$ [1)]

1) Die Bedeutung der Indizes ist aus Bild 3.2 ersichtlich.

genügen [28], damit der Gl. (4.6) entsprechende Produktansatz anwendbar ist. Dabei sind die Wandimpedanzen wie in Gln. (2.43) - (2.46) definiert. Die analoge Beziehung für ein Kugelsektorhorn

$$Z_{r\vartheta}Z_{\varphi r} + Z_{\vartheta r}Z_{r\varphi} - Z_{r\varphi}Z_{r\vartheta} = 0 \tag{4.23}$$

folgt aus (4.17) - (4.20) für den Fall, daß ϑ_1^* klein ist und g(r) einen Verlauf wie in Gl. (4.3) aufweist, wie man sich durch Einsetzen von Gl. (4.3) und (4.16) in Gl. (4.23) überzeugen kann.

4.1.2 E- und H-Wellen entkoppelt

Aus Gln. (2.54) - (2.57) folgt, daß f_E und f_H voneinander unabhängig sind, wenn

$$1. \quad Z_{r\varphi} = Z_{\varphi r} = Z_{r\vartheta} = Z_{\vartheta r} = 0 \tag{4.24}$$

oder

$$2. \quad Z_{r\varphi} = Z_{r\vartheta} = 0 \tag{4.25}$$

oder

$$3. \quad Z_{\varphi r} = Z_{\vartheta r} = \infty \tag{4.26}$$

sind. Fall 1 stellt das Kugelsektorhorn mit unendlich gut leitenden Wänden dar, für das die Randbedingungen (2.30) und (2.32) gelten. Im Fall 2 ergibt sich aus Gl. (2.54) und (2.56) zunächst

$$f_E = 0 \tag{4.27}$$

auf allen vier Wänden und weiter[1] aus Gl. (2.55) an der Wand $\vartheta^* = \vartheta_1^*$

$$\frac{1}{f_H}\frac{\delta f_H}{\delta \vartheta} = -\,j\,\frac{\nu(\nu+1)}{kr}\,\frac{Z_{\varphi r}}{Z} \tag{4.28}$$

1) In [28] wird ohne Beweis behauptet, daß in Hohlleitungen mit Randbedingungen nach Gl. (4.25) H-Wellen nicht existieren können. Die Inkorrektheit dieser Aussage wurde auch in [29] festgestellt.

sowie aus Gl. (2.57) an der Wand $\varphi = \varphi_1$

$$\frac{1}{f_H}\frac{\partial f_H}{\partial \varphi} = -j\frac{\nu(\nu+1)\sin\vartheta}{kr}\frac{Z_{\vartheta r}}{Z} \tag{4.29}$$

gegenüber $\frac{\partial f_H}{\partial n} = 0$ bei vollkommen leitenden Wänden. Dabei müssen $Z_{\varphi r}$ und $Z_{\vartheta r}$ nach den Ausführungen in Anschluß an Gl. (2.57) proportional r angenommen werden. Im Fall 3 erhält man entsprechend aus Gl. (2.55) und (2.57)

$$f_H = 0 \tag{4.30}$$

auf allen vier Wänden und aus Gl. (2.54) an der Wand $\vartheta = \vartheta_1^*$

$$\frac{1}{f_E}\frac{\partial f_E}{\partial \vartheta} = -j\frac{\nu(\nu+1)}{kr}\frac{Z}{Z_{r\varphi}} \tag{4.31}$$

und aus Gl. (2.56) an der Wand $\varphi = \varphi_1$

$$\frac{1}{f_E}\frac{\partial f_E}{\partial \varphi} = -j\frac{\nu(\nu+1)\sin\vartheta}{kr}\frac{Z}{Z_{r\vartheta}}\,, \tag{4.32}$$

wobei $Z_{r\varphi}$ und $Z_{r\vartheta}$ proportional 1/r angesetzt werden müssen. In allen drei Fällen sind also f_E und f_H nicht mehr über die Randbedingungen verkoppelt. Weiter folgt für Fall 2 aus Gl. (4.27), daß der Produktansatz nach Gl. (4.6) bei E-Wellen immer möglich ist. Bei H-Wellen muß $Z_{\varphi r}$ konstant und $Z_{\vartheta r}$ proportional $1/\sin\vartheta$ sein. Im Fall 3 ergibt sich analog aus Gl. (4.30), daß die Anwendung des Produktansatzes für H-Wellen immer erlaubt ist. Bei E-Wellen muß nach Gl. (4.31) $Z_{r\varphi}$ konstant und nach Gl. (4.32) $Z_{r\vartheta}$ proportional $\sin\vartheta$ sein.

4.2 Rechenprogramm zur Berechnung der Felder in der Apertur

Als Apertur wird wieder die der Öffnung zugeordnete Kugelsektorfläche gewählt. Die Konstruktion des Netzes erfolgt wie es auf Seite 17 für das Rechenprogramm HSOR beschrieben wurde. Für das Überführen der Differentialgleichungen in Differenzengleichungen werden Differenzenquotienten benutzt, die Funktionswerte in jeweils 7 benachbarten Gitterpunkten verwenden [8]. Dadurch sind in der Matrix (C) der Gl. (2.69) in jeder Zeile bis zu 28 Elemente ungleich Null. Die Matrixelemente, die aus der Differentialgleichung (2.17) nach dem im Abschnitt 3.1 beschriebenen Verfahren hervorgehen, sind reell. Einige der aus den Randbedingungen (2.54) - (2.57) herrührenden Matrixelemente können sowohl bei reellen als auch bei komplexen Wandimpedanzen komplex sein. Um den Rechenaufwand gering zu halten und mit dem verfügbaren Speicherplatz auszukommen, wurden deshalb nur solche Fälle untersucht, bei denen die Wandimpedanzen kapazitiv oder induktiv sind und C_g reell ist, so daß alle Matrixelemente reell sind. In Gl. (4.2) wurde der Verlauf von g(r) ermittelt, für den C_g entsprechend Gl. (4.3) reell ist, während nach Ausweis von Gln. (2.53) und (2.18) C_g im allgemeinen komplex ist. Bild 4.2 ermöglicht im konkreten Fall r_o so zu wählen, daß der Imaginärteil von C_g gegenüber dem Realteil vernachlässigbar ist. Da sich im Programm reelle Matrizen mit bis zu 128 Zeilen und Spalten speichern lassen, können Gitternetze mit maximal 64 Gitterpunkten angewendet werden. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, daß damit durch die Verwendung von Differenzenquotienten hoher Ordnung hinreichend genaue Ergebnisse für die Feldverteilung erreichbar sind. Die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren der relativ kleinen Matrizen erfolgt durch Anwendung der QR-Iteration und durch Matrixinversion und zwar so, wie es auf Seite 21 für das Auffinden von Ausgangswerten für die Anwendung der SOR beschrieben wurde.

Gemäß der Formulierung des Eigenwertproblems nach Gln. (2.63) und (2.64) wird C_g aufgrund von Gln. (2.65) bis (2.68) zur Berechnung der Matrixelemente benötigt. Andererseits ist C_g nach Gl. (4.3) eine Funktion des noch zu ermittelnden Eigenwertes $\nu(\nu+1)$. Ausbreitungskonstante und Feldverteilung einer Welle

werden also nur dann richtig berechnet, wenn für die Aufstellung der Matrix solche Werte von C_g mit dem zugehörigen Radius r_o herangezogen werden, die zusammen mit dem durch Lösen des Eigenwertproblems ermittelten Eigenwerte $\Lambda = \nu(\nu+1)$ Gl. (4.3) befriedigen. Solche Wertepaare C_g und r_o lassen sich durch folgendes Verfahren bestimmen: Da für $kr \gg 1$ und $kr \gg \nu + 1/2$ nach Gln. (2.21) und (2.53) $C_g = 1{,}0$ ist, wird mit diesem Wert von $C_g = C_{g1}$ beginnend der Eigenwert Λ_1 für einen großen Radius r_{o1} berechnet. Unter der Annahme, daß der so gefundene Eigenwert auch für einen etwas kleineren Wert von C_g, nämlich $C_{g2} < 1$ näherungsweise noch richtig ist, wird aus Bild 4.2 oder mit Gl. (4.3) ein Näherungswert für r_{02} ermittelt. Führt man nun die Berechnung des Eigenwertes mit C_{g2} und r_{02} durch, dann erhält man einen neuen Wert Λ_2. Aus Λ_2 und C_{g2} wird mit Gl. (4.3) ein verbesserter Wert r_{03} bestimmt. Die erneute Anwendung des Rechenprogramms mit C_{g2} und r_{03} liefert Λ_3. Durch Interpolation gewinnt man aus r_{02} und r_{03} den weiter verbesserten Wert r_{04}. Das Auffinden aller weiteren Radien r_{on} bis zum vorgegebenen r_o-Wert erfolgt nach dem gleichen Verfahren. Die geeignete "Schrittweite" von aufeinander folgenden C_g-Werten läßt sich im konkreten Fall durch Probieren ermitteln. Das in diesem Abschnitt beschriebene Rechenprogramm wird im folgenden mit EHKUGS bezeichnet.

4.3 Diskussion der Genauigkeit der Ergebnisse

Die Bestimmung der Genauigkeit der mit dem Rechenprogramm EHKUGS erzielten Ergebnisse wird wie in Abschnitt 3.2 durch Vergleich mit analytisch gewonnenen durchgeführt. Dabei soll sowohl eine kugelsektorförmige Wellenleitung, in der sich E- und H-Wellen unabhängig voneinander ausbreiten können, als auch eine, in der beide Wellen durch die Wandimpedanz verkoppelt sind, behandelt werden.

Als Beispiel für den zuerst genannten Fall wird eine kugelsektorförmige Wellenleitung mit den Wandimpedanzen

$$Z_{r\varphi} = Z_{r\vartheta} = 0 \qquad (4.33)$$

und

$$\frac{Z_{\vartheta r}}{Z} = j\,\frac{X_{\vartheta r}}{Z} = jx_{\vartheta r}, \qquad \frac{Z_{\varphi r}}{Z} = j\,\frac{X_{\varphi r}}{Z} = jx_{\varphi r} \tag{4.34}$$

(Fall 2, S. 57) diskutiert. Die Realisierung von Wandimpedanzen entsprechend Gln.(4.33) und (4.34) wird im Anhang (Abschnitt 7.1.2) beschrieben. Eine Lösung der Gln. (4.28) und (4.29) ist

$$f_H = C_H\, P_4^1\,(\cos\vartheta)\,\sin\varphi\ , \tag{4.35}$$

wobei $P_4^1\,(\cos\vartheta)$ in Gl. (3.13) erklärt ist. Der exakte Eigenwert ist also

$$\Lambda = \nu(\nu+1) = 20\ . \tag{4.36}$$

Für einige Öffnungswinkel ϑ_1^* und φ_1 sind in der Tabelle 4.1 die sich aus den Gln. (4.28) und (4.29) ergebenden Wandimpedanzen für kr = 20 angegeben. Ebenfalls eingetragen ist der numerisch errechnete Eigenwert in Abhängigkeit von dem verwendeten Maschenabstand $h_\varphi = h_\vartheta$

Tabelle 4.1

$\varphi_1 = \vartheta_1^*$	$X_{\varphi r}$	$X_{\vartheta r}$	$\Lambda = (\nu+1)$ mit EHKUGS $h_\varphi = h_\vartheta =$		
			$\varphi_1/5$	$\varphi_1/6$	$\varphi_1/7$
10°	+4,645	-0,1763	21,36	20,47	20,08
20°	+0,321	-0,3651	21,14	20,37	20,07
30°	-3,701	-0,5738	20,73	20,50	20,10
40°	-63,51	-0,8364	20,95	20,28	20,05

Man sieht, daß schon bei $h_\varphi = h_\vartheta = \varphi_1/5$ der Fehler geringer als 6 % ist. Mit $h_\varphi = \varphi_1/7$ (mehr Gitterpunkte können wegen des begrenzten Speicherplatzes nicht berücksichtigt werden) ist der

Fehler kleiner als 0,5 %. Die Genauigkeit der errechneten Vektorpotentiale und der Feldkomponenten wurde ebenfalls überprüft. Bei einem Maschenabstand von $h_\varphi = \varphi_1/5$ liegt der maximale Fehler bei ca. 9 %, bei $h_\varphi = \varphi_1/7$ nur noch bei 1 %.

Im Falle eines Kugelsektorhornes, in dem E- und H-Wellen miteinander verkoppelt sind, stößt die Suche nach Lösungen, die mit nicht zu großem Aufwand analytisch auswertbar sind, auf Schwierigkeiten. Wie Gln. (4.9) und (4.10) zeigen, benötigt man nämlich für f_E und f_H zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (2.17). Da für die zugeordneten Legendreschen Funktionen zweiter Art keine Tabellen zur Verfügung stehen, wird im folgenden ein Beispiel diskutiert, für das der Öffnungswinkel ϑ_1^* klein und daher Gl. (4.15) erfüllt ist.

Aus Gl. (4.23) ergibt sich, daß das Problem einer kugelsektorförmigen Wellenleitung, für die

$$Z_{\vartheta r} = Z_{r\vartheta} = 0 \tag{4.37}$$

und

$$Z_{r\varphi} = Z_{\varphi r} \neq 0$$

gelten, mit dem Produktansatz lösbar ist. Wie im Abschnitt 7.1.1 gezeigt wird, ist eine solche Wandimpedanz durch eine dielektrische Schicht auf der leitenden Wand realisierbar. In einer Rechteckhohlleitung, die aus der kugelsektorförmigen Wellenleitung bei gegen Null gehenden Öffnungswinkeln entsteht, sind die Eigenlösungen Längsschnittwellen[1] (LSE_z- und LSH_z-Wellen) [30]. Analog dazu erhält man aus den Gln. (4.17) und (4.18) für die kugelsektorförmige Wellenleitung ebenfalls zwei Lösungen, nämlich

1.
$$C_H = - C_g \frac{p}{q} \frac{C_E}{Z} \tag{4.38}$$

$$\frac{jZ_{r\varphi}}{krZ_o} = \pm \frac{1}{p} \begin{Bmatrix} \tan p\vartheta_1^* \\ \cot p\vartheta_1^* \end{Bmatrix} \tag{4.39}$$

$$\text{mit } E_\vartheta = 0 \,, \qquad LSH_\vartheta\text{-Wellen} \tag{4.40}$$

1) Längsschnitt E_z- oder H_z-Wellen (im englischen Longitudinal-Section E_z- oder H_z-Modes) zeichnen sich dadurch aus, daß die z-Komponente des magnetischen oder des elektrischen Feldes gleich Null ist.

2. $$C_H = \frac{1}{C_g}\,\frac{q}{p}\,\frac{C_E}{Z} \qquad (4.41)$$

$$\frac{jZ_{r\varphi}\,kr}{Z_o} = \pm\, p \left\{ \begin{matrix} \tan p\vartheta_1^* \\ \cot p\vartheta_1^* \end{matrix} \right\} \qquad (4.42)$$

$$\text{mit } H_\vartheta = 0 \,. \qquad \text{LSE}_\vartheta\text{-Wellen} \qquad (4.43)$$

In beiden Fällen ist

$$q = \frac{m\pi}{2\varphi_1}\,, \quad m = 0,1,2, \ldots \,. \qquad (4.44)$$

Aus den Gln. (4.38) bis (4.43) findet man die Gleichung zur Berechnung von p für die Hauptwelle einer kugelsektorförmigen Wellenleitung aufgrund der Überlegungen, daß im Grenzfall ideal leitender Wände für die Hauptwelle

$$f_H \sim \sin p\vartheta^* \quad \text{mit } p = \frac{\pi}{2\vartheta_1^*}\,, \quad q = 0 \qquad (4.45)$$

und

$$f_E = 0 \qquad (4.46)$$

gelten. Die Abhängigkeit von ϑ wird also in Gl. (4.15) und damit auch in Gln. (4.39) und (4.42) durch die untere Funktion beschrieben. Da $f_E = 0$ sein muß, ist die Hauptwelle ein LSH_ϑ-Wellentyp.

Als Beispiel wird eine kugelsektorförmige Wellenleitung mit den Öffnungswinkeln

$$\vartheta_1^* = 16{,}30^\circ, \qquad \varphi_1 = 10{,}90^\circ \qquad (4.47)$$

gewählt. Für den Radius r_o wird der Wert $r_o = 6\,\lambda$ angenommen[1]. Die aus Gl. (4.39) berechneten Werte von p sind für verschiedene Wandimpedanzen

$$\frac{Z_{r\varphi}}{Z} = j\,\frac{X_{r\varphi}}{Z} = j\,x_{r\varphi}, \qquad 0 \le x_{r\varphi} \le \infty \qquad (4.48)$$

---

1) Ein Pyramidenhorn mit denselben Daten wurde bei den Messungen (s. Abschnitt 5.2.1) verwendet.

zusammen mit den aus ihnen folgenden Eigenwerten $\Lambda = p^2$ in Tabelle 4.2 aufgeführt. Man sieht, daß mit zunehmendem $x_{r\varphi}$ p kleiner wird. Für $x_{r\varphi} = \infty$ wird $p = 0$. Da nach Gl. (4.45) außerdem $q = 0$ ist, erhält man für diesen Fall eine konstante Feldverteilung des E- und H-Feldes in jeder Kugelsektorfläche. Aus den Werten für p lassen sich die für C_g mit Gl. (4.3) berechnen. Für alle $x_{r\varphi}$ entsprechend Gl. (4.48) liegt C_g zwischen 0,99 und 1,00. Die Größe l_w (s. Bild 4.1) kann mit Hilfe von Bild 4.2 bestimmt werden. Bei den in Tabelle 4.2 angegebenen Werten wurde für $\mathrm{Im}\left(\frac{dg(r)}{dr} / g(r)\right)$ eine Änderung von 10 % und $\mathrm{Re}\left(\frac{dg(r)}{dr} / g(r)\right) / < 0{,}01$ im Bereich $(r_o - l_w) \leq r \leq r_o$ zugelassen.

Um mit der analytischen Rechnung vergleichbare Ergebnisse zu erhalten, erfolgte die numerische Berechnung der Eigenwerte und Feldverläufe mit dem Rechenprogramm EHKUGS, wobei sowohl in der Differentialgleichung (2.17) als auch in den Randbedingungen (2.54) - (2.57) $\sin\vartheta = 1$ gesetzt wurde. Die so erhaltenen Werte für Λ sind für verschiedene Maschenweiten in der Tabelle 4.2 aufgeführt.

Tabelle 4.2

				Λ mit EHKUGS $h_\varphi = h_\vartheta =$			
	mit Gl.(4.39) ($\sin\vartheta = 1$)			($\sin\vartheta = 1$)			"exakt"
$x_{r\varphi}$	p	Λ	l_w/λ	$\varphi_1/5$	$\varphi_1/6$	$\varphi_1/7$	$\varphi_1/7$
0,0	5,53	30,64	r_o	-	-	-	-
0,1	5,48	30,06	4,0	30,80	30,27	30,22	30,77
1,0	5,07	25,74	4,2	26,25	25,81	25,74	26,33
10,0	3,09	9,57	4,7	10,08	9,80	9,80	10,05
100,0	1,12	1,26	r_o	1,49	1,47	1,41	1,50
∞	0,0	0,0	r_o	-	-	-	-

Man erkennt, daß schon mit einem Maschenabstand von $h_\varphi = \varphi_1/5$ ein für viele Anwendungsfälle hinreichend genaues Ergebnis erzielbar ist. In der letzten Spalte der Tabelle ist zusätzlich der Eigenwert angegeben, der mit EHKUGS unter Zugrundelegung der Differentialgleichung (2.17) und der Randbedingungen (2.54) - (2.57) mit $h_\varphi = h_\vartheta = \varphi_1/7$ berechnet wurde. Eine wesentliche Abweichung gegenüber den in der vorletzten Spalte aufgeführten Werten tritt nicht auf. Weiter wurden die Feldkomponenten der Hauptwelle sowohl analytisch als auch numerisch berechnet, wobei zunächst wiederum in Differentialgleichung (2.17) und in den Randbedingungen (2.54) - (2.57) $\sin\vartheta = 1$ gesetzt wurde. In allen betrachteten Fällen lag der Fehler der numerisch ermittelten Ergebnisse bezogen auf den maximalen Betrag der Feldstärke unter 1 %, wenn die Rechnung mit $h_\varphi = \varphi_1/7$ durchgeführt wurde. Bei der numerischen Berechnung der Feldkomponenten mit der Differentialgleichung (2.17) und den Randbedingungen (2.54) - (2.57) zeigen die Ergebnisse von den mit der Näherung $\sin\vartheta = 1$ gewonnenen eine Abweichung von maximal 0,5 %. Daraus folgt, daß bei einem Kugelsektorhorn mit den Öffnungswinkeln $\vartheta_1^* = 16{,}30$ und $\varphi_1 = 10{,}9^\circ$ die Krümmung der oberen und unteren Berandungsflächen keinen Einfluß auf das Ergebnis hat. Die Rechenzeiten, wie sie zur Berechnung der Matrixeigenwerte mit der QR-Iteration (s. Abschnitt 3.1) und zur Bestimmung der Feldkomponenten der Hauptwelle in Abhängigkeit von der Anzahl der Gitterpunkte benötigt werden, sind Tabelle 4.3 zu entnehmen. Aus diesen Werten ergibt sich, daß die Rechenzeit in etwa mit der 3. Potenz der Anzahl der Gitterpunkte zunimmt.

Tabelle 4.3

	Rechenzeit EHKUGS	
Gitterpunkte	Eigenwerte	Feldkomponenten
25	14 sec	5 sec
36	40 sec	13 sec
49	100 sec	34 sec
64	225 sec	75 sec

4.4 Kugelsektorhörner mit bestimmten Wandimpedanzen

4.4.1 Kugelsektorhorn mit hohem Flächenwirkungsgrad für Zirkularpolarisation, Wände mit Riefen in Ausbreitungsrichtung

Eine Antenne für Zirkularpolarisation muß gleiche Form der Hauptkeule in E- und H-Ebene für horizontale und vertikale Polarisation in der Apertur haben. Dieses Problem wurde in Abschnitt 3.3.2 für ein Horn mit vollkommen leitenden Wänden durch geeignete Formgebung des Randes der Apertur gelöst. Dabei ergibt sich, daß mit wachsenden Öffnungswinkeln der Flächenwirkungsgrad abnimmt. Um dem entgegenzuwirken, muß eine möglichst homogene und gleichphasige Ausleuchtung angestrebt werden. Im vorherigen Abschnitt hat sich u.a. gezeigt, daß sich eine homogene Ausleuchtung der kugelsektorförmigen Apertur für lineare Polarisation durch Wahl der Wandimpedanzen erreichen läßt. In diesem Abschnitt soll untersucht werden, ob sich Wandimpedanzen finden lassen, die zu einer möglichst homogenen Belegung für Zirkularpolarisation in der Apertur führen. Die Hauptwelle eines Kugelsektorhorns mit Wandimpedanzen nach Gl. (4.37) besitzt, wie anhand der Tabelle 4.2 ersichtlich, für $x_{r\varphi} \to \infty$ wegen $p = 0$ in einer Fläche $r = \text{konst.}$ eine konstante Feldverteilung. Für die um 90° gedrehte Polarisationsrichtung gibt es jedoch für $x_{r\varphi} \to \infty$ keinen Wellentyp, der eine auch nur angenähert homogene Belegung erzeugen würde. In den folgenden Überlegungen wird zur Vereinfachung der Darstellung der Öffnungswinkel ϑ_1^* so klein angenommen, daß die Legendreschen Funktionen entsprechend Gl. (4.15) durch $\sin(p\vartheta^*)$ oder $\cos(p\vartheta^*)$ ersetzt werden können. Dann hätte die φ-Komponente des elektrischen Feldes einer H_{01}-Welle in einer kugelsektorförmigen Wellenleitung mit vollkommen leitenden Wänden ($\vartheta_1^* < \varphi_1$) als Funktion von ϑ^* einen cosinusförmigen Verlauf. Der Abfall von E_φ zum Rand hin ist hingegen weniger stark, wenn an den Seitenwänden $\vartheta^* = \pm \vartheta_1^*$ die Wandimpedanz $Z_{\varphi r}$ induktiv ist. Mit den Gln. (4.10) und (4.15) erhält man aus Gl. (4.28) die Gleichung zur Bestimmung von p. Geht man weiter davon aus, daß $Z_{\varphi r}$ nicht von φ abhängt (s. S. 58) und setzt man versuchsweise

$Z_{r\varphi} = 0$, dann ergibt sich

$$\frac{jkr\,Z}{Z_{\varphi r}} = \frac{\nu(\nu+1)\tan(p\vartheta_1^*)}{p} \,. \tag{4.49}$$

Da für die H_{01}-Welle $q = 0$ ist, folgt ferner mit Gl. (4.16) und mit $Z_{\varphi r}/Z = jx_{\varphi r}$

$$\frac{x_{\varphi r}}{kr} = \frac{1}{p}\cot(p\vartheta_1^*) \,. \tag{4.50}$$

Der mit dem aus dieser Gleichung sich ergebenden Wert von p berechnete Verlauf von E_φ als Funktion von ϑ^* ist in Bild 4.3 für $r_o = 10\,\lambda$, $\varphi_1 = \vartheta_1^* = 10^o$ und drei Werte von $x_{\varphi r}$ dargestellt.

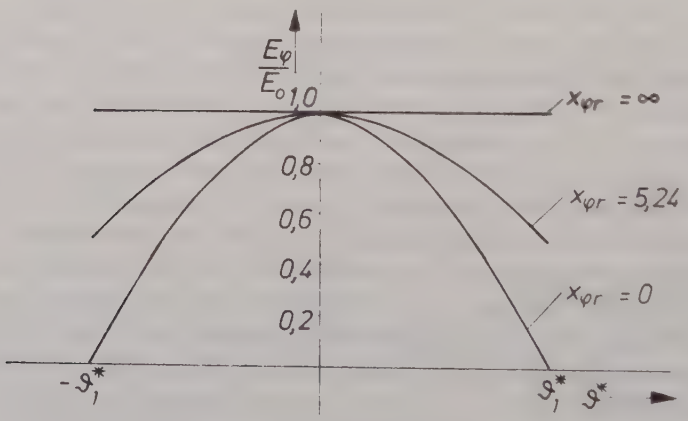


Bild 4.3

Für die andere Polarisationsrichtung ist p für die H_{10}-Welle in der kugelsektorförmigen Wellenleitung zu bestimmen. Es ergibt sich aus Gl. (4.28)

$$\frac{x_{\varphi r}}{kr} = -\frac{p}{p^2+q^2}\tan(p\vartheta_1^*) \tag{4.51}$$

wobei

$$q = \frac{\pi}{2\varphi_1} \tag{4.52}$$

ist. Der Verlauf von E_ϑ in Abhängigkeit von ϑ^* ist daher nicht mehr konstant wie bei einem Kugelsektorhorn mit vollkommen leitenden Wänden, weil p nach Gl. (4.51) für $x_{r\varphi} > 0$ imaginär ist und damit E_ϑ vom Rand zur Mitte hin exponentiell abfällt. Diese im vorliegenden Fall unerwünschte Abweichung vom konstanten Verlauf läßt sich verringern, wenn $|x_{\varphi r}|$ mit wachsendem $|\varphi|$ abnimmt. Da für die H_{10}-Welle in einer kugelsektorförmigen Wellenleitung mit unendlich gut leitenden Wänden der Verlauf von H_r für $\vartheta^* = \pm \vartheta_1^*$ durch

$$|H_r| \sim \sin(q\varphi_1) \tag{4.53}$$

beschrieben wird, erfährt er nämlich an der Wand und damit in der gesamten Apertur dann keine wesentliche Störung, wenn $x_{\varphi r}$ nur in der Mitte der Wand stark von Null verschieden ist. Andererseits ist H_r bei der H_{01}-Welle in der unendlich gut leitenden Wellenleitung an den Wänden $\vartheta^* = \pm \vartheta_1^*$ konstant. Sein Verlauf kann daher auch dann noch in der gewünschten Weise stark beeinflußt werden, wenn $x_{\varphi r}$ so gewählt wird, daß es mit $|\varphi|$ stark abnimmt. Einen Hornstrahler mit einer weitgehend homogenen Belegung für horizontale und vertikale Polarisation erhält man also, wenn man ein symmetrisches Kugelsektorhorn ($\varphi_1 = \vartheta_1^*$) an den gegenüberliegenden Wänden mit den Wandimpedanzen:

$$Z_{r\varphi} = Z_{r\vartheta} = 0 \tag{4.54}$$

$$x_{\varphi r}(\varphi) = x_{\vartheta r}(\vartheta^*) \qquad \text{für} \quad \varphi = \vartheta^* \tag{4.55}$$

versieht, die den Symmetriebedingungen

$$x_{\varphi r}(\varphi) = x_{\varphi r}(-\varphi) \quad \text{und} \quad x_{\vartheta r}(\vartheta^*) = x_{\vartheta r}(-\vartheta^*) \tag{4.56}$$

genügen. Dabei ist die Funktion $x_{\varphi r}(\varphi)$ so zu bestimmen, daß die Belegung möglichst homogen wird und die Hauptkeule von H_{10}- oder H_{01}-Welle in E- und H-Ebene übereinstimmen.

Um einen günstigen Verlauf von $x_{\varphi r}$ und $x_{\vartheta r}$ für ein konkretes Kugelsektorhorn mit den Öffnungswinkeln

$$\varphi_1 = \vartheta_1^* = 10^\circ$$

und der Länge

$$l = 10\ \lambda$$

zu ermitteln, wurden das E- und H-Diagramm der H_{01}-Welle zunächst für

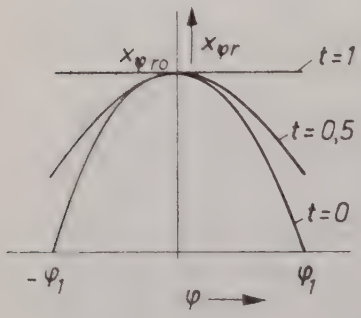


Bild 4.4

$$x_{\varphi r} = x_{\varphi ro}\left[(1-t)\cos\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\frac{\pi}{2}\right) + t\right]$$

$$x_{\vartheta r} = x_{\vartheta ro}\left[(1-t)\cos\left(\frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*}\frac{\pi}{2}\right) + t\right] \qquad (4.57)$$

mit

$$x_{\varphi ro} = x_{\vartheta ro} = 1{,}0;\ 2{,}15;\ 4{,}64;\ 10{,}0;\ 21{,}5;\ 46{,}4 \text{ und } 100{,}0$$

und (4.58)

$$t = 1{,}0;\ 0{,}9 \ldots 0{,}0\ .$$

Als Beispiel dieser Reihe sind die Ergebnisse für $x_{\varphi ro} = x_{\vartheta ro} = 21{,}5$ und $t = 1{,}0;\ 0{,}5;\ 0{,}0$ in den Bildern 4.5 - 4.7 dargestellt. Es ist ersichtlich, daß mit abnehmendem t die Übereinstimmung zwischen E- und H-Diagramm verbessert wird. Der gleiche Befund ergab sich auch für die anderen $x_{\varphi ro} = x_{\vartheta ro}$ Werte. Deshalb wurde in einer weiteren Versuchsreihe der Abfall der Wandimpedanzen noch stärker betont, indem für deren Verlauf

$$x_{\varphi r} = x_{\varphi ro}\ \cos^m\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$m = 1,2,3,4 \qquad (4.59)$$

$$x_{\vartheta r} = x_{\vartheta ro}\ \cos^m\left(\frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*}\frac{\pi}{2}\right)$$

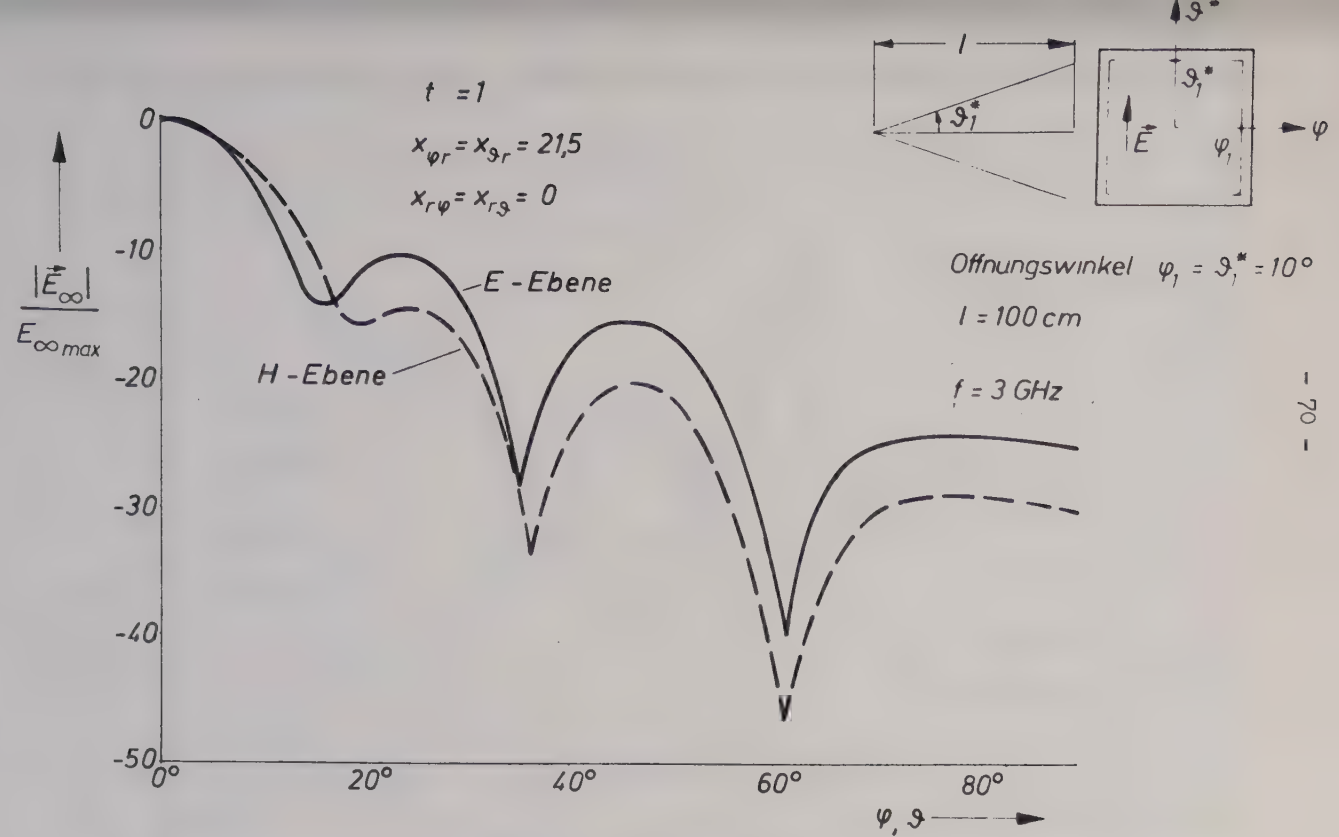


Bild 4.5 Richtdiagramm eines Kugelsektorhorns mit anisotroper Wandimpedanz

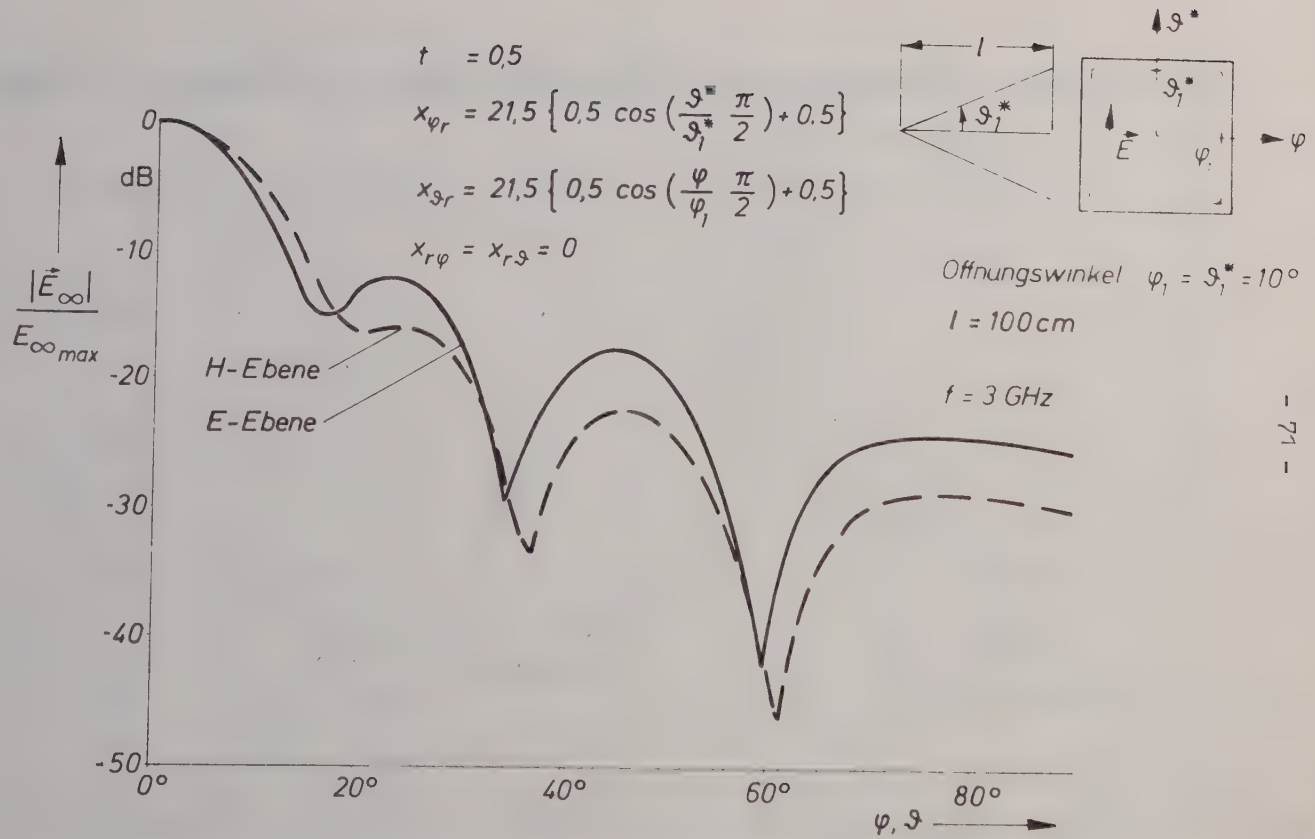


Bild 4.6 Richtdiagramm eines Kugelsektorhorns mit anisotroper Wandimpedanz

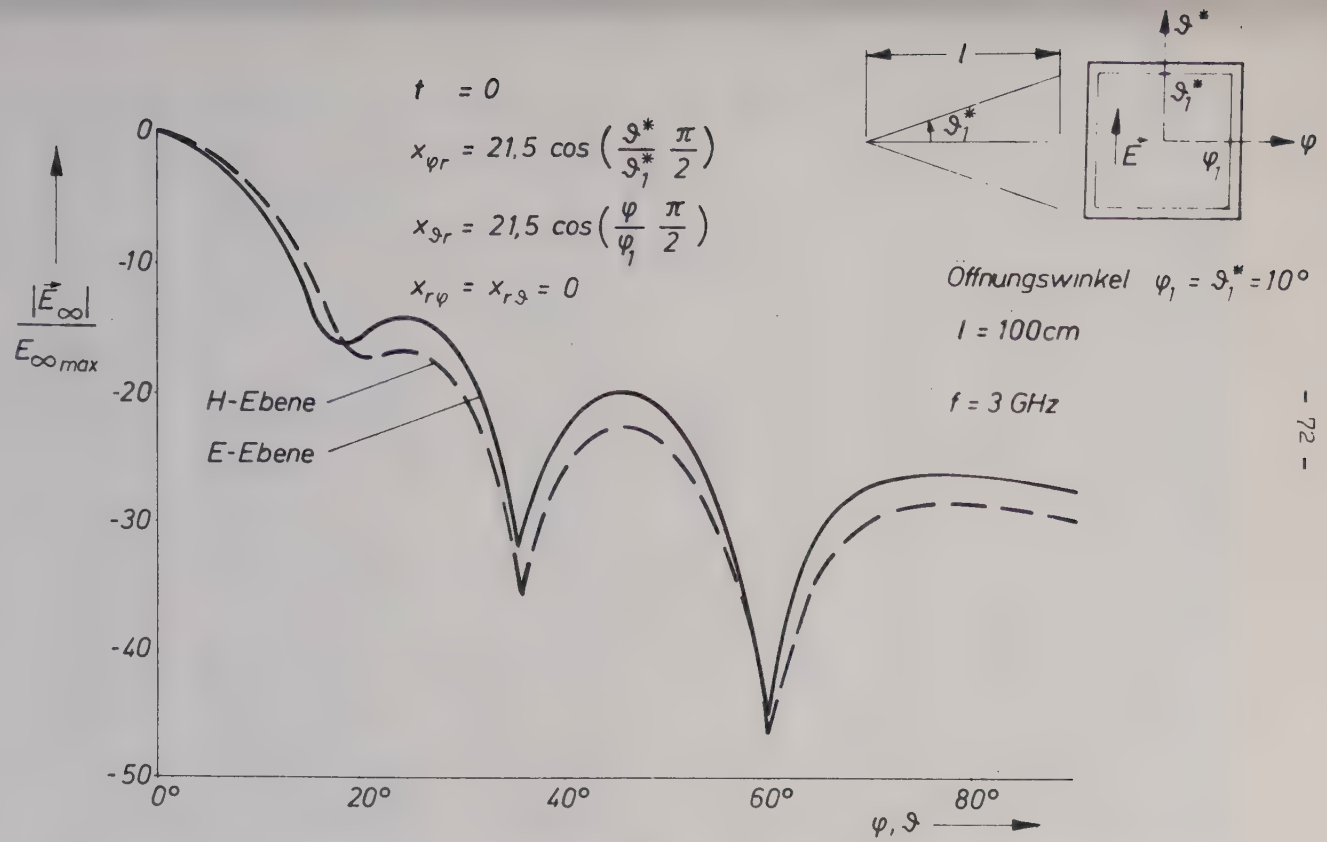


Bild 4.7 Richtdiagramm eines Kugelsektorhorns mit anisotroper Wandimpedanz

gesetzt wurde. Dabei wurden für die Werte von $x_{\varphi ro} = x_{\vartheta ro}$ dieselben wie vorher (s. Gl. (4.58)) gewählt. Die Bilder 4.8 bis 4.10 zeigen die Ergebnisse für m = 2 und unterschiedliche Wandimpedanzen $x_{\varphi r}$ und $x_{\vartheta r}$. Für die Werte in Bild 4.10 ist das E- und H-Diagramm im gesamten Verlauf nahezu gleich. In diesem Fall ändert sich der Verlauf der Kurven nicht sehr, wenn m im Bereich $1 \leq m \leq 3$ variiert wird. Das ist wichtig für die Realisierung eines Wandimpedanzverlaufs nach Gl. (4.59).

In Bild 4.11 ist der Verlauf des elektrischen Feldes in der Apertur für den günstigsten Fall, nämlich für ein Horn mit den Wandimpedanzen

$$x_{\varphi r}(\varphi) = 21{,}5 \cos^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_{\vartheta r}(\vartheta^*) = 21{,}5 \cos^2\left(\frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*}\frac{\pi}{2}\right) \qquad (4.60)$$

dargestellt. Die Belegung ist weitgehend homogen, da die Feldlinien im größten Teil der Apertur überwiegend parallel zueinander verlaufen und einen nahezu konstanten Abstand haben. Nur zu den Rändern hin steigt die Feldstärke im Bereich der Symmetrieachsen des Hornes ein wenig an, in den Ecken der Apertur sinkt sie auf Null ab.

Um den Einfluß der Wandimpedanz auf den Flächenwirkungsgrad deutlich zu machen, ist es beim Vergleich mit anderen Hornantennen zweckmäßig, den Gewinn jeweils für gegen Null gehende Öffnungswinkel zu berechnen, so daß die Phase in der dann ebenen Apertur konstant ist. Für die Wandimpedanz nach Gl. (4.60) erhält man mit EHKUGS $q_F \approx 0{,}91$. Dieser Wert liegt also 10 % höher als der des im Abschnitt 3.3.2 beschriebenen Strahlers.

Wie im Anhang dargestellt, lassen sich Wandimpedanzen entsprechend Gl. (4.59) durch Wände mit Riefen realisieren, die in der Ausbreitungsrichtung der Welle verlaufen. Untersucht wird noch die Frequenzabhängigkeit des Strahlungsverhaltens einer derartigen

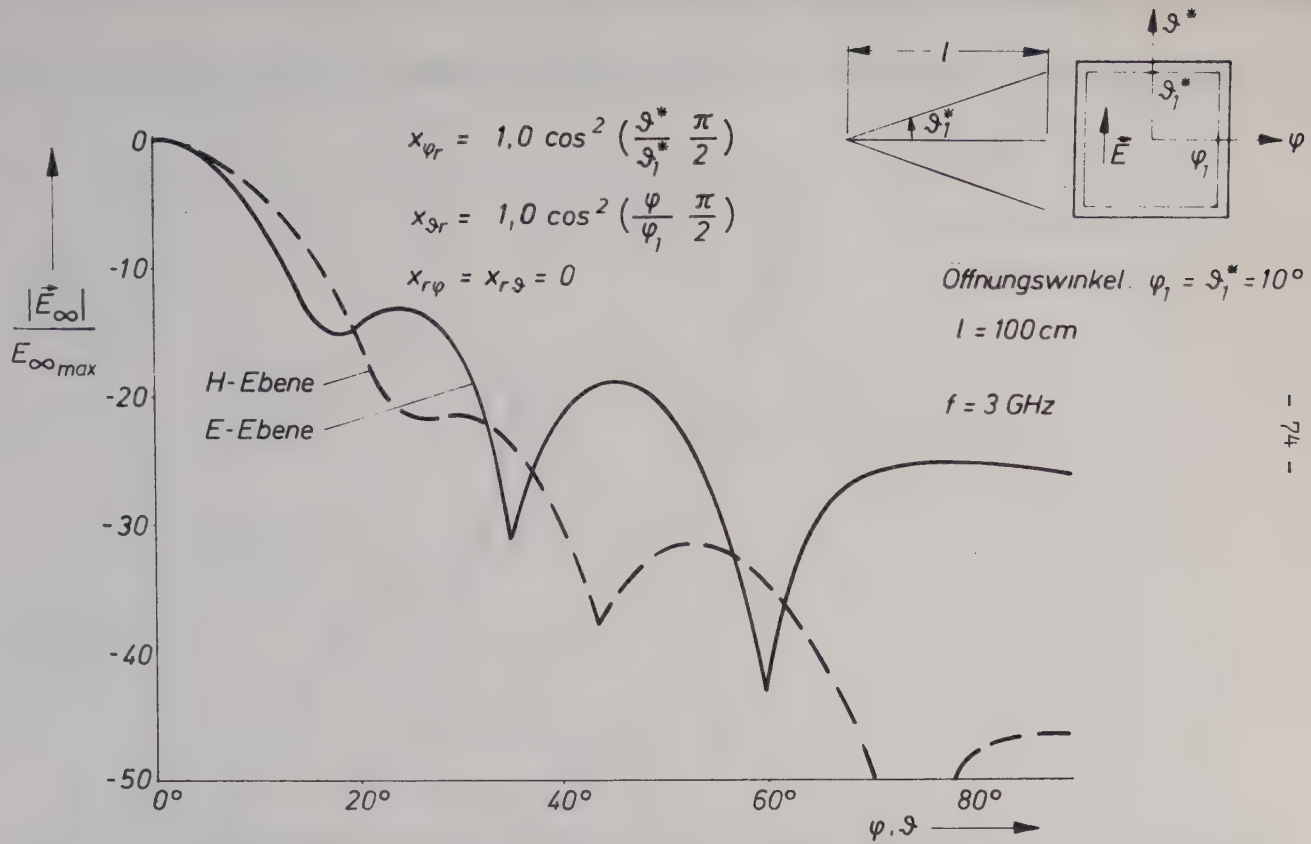


Bild 4.8 Richtdiagramm eines Kugelsektorhorns mit anisotroper Wandimpedanz

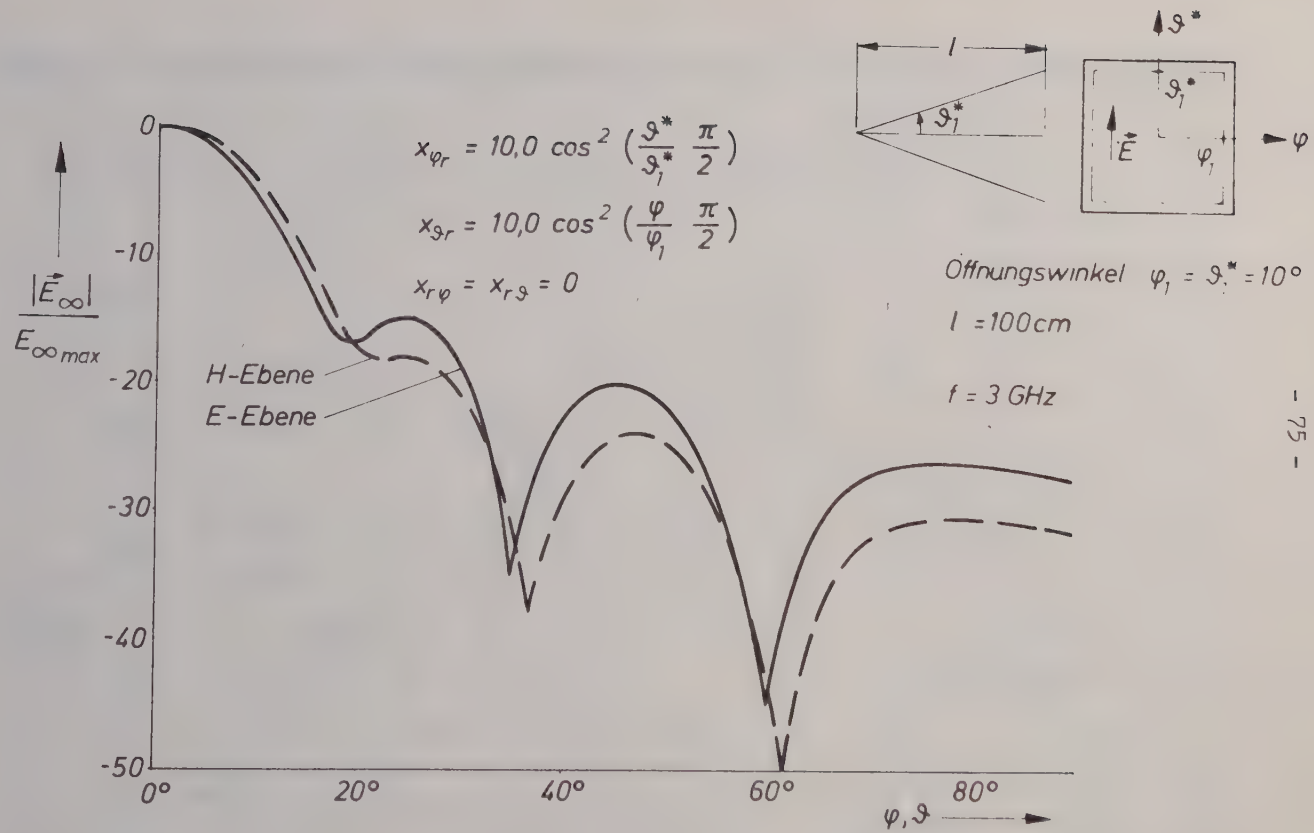


Bild 4.9 Richtdiagramm eines Kugelsektorhorns mit anisotroper Wandimpedanz

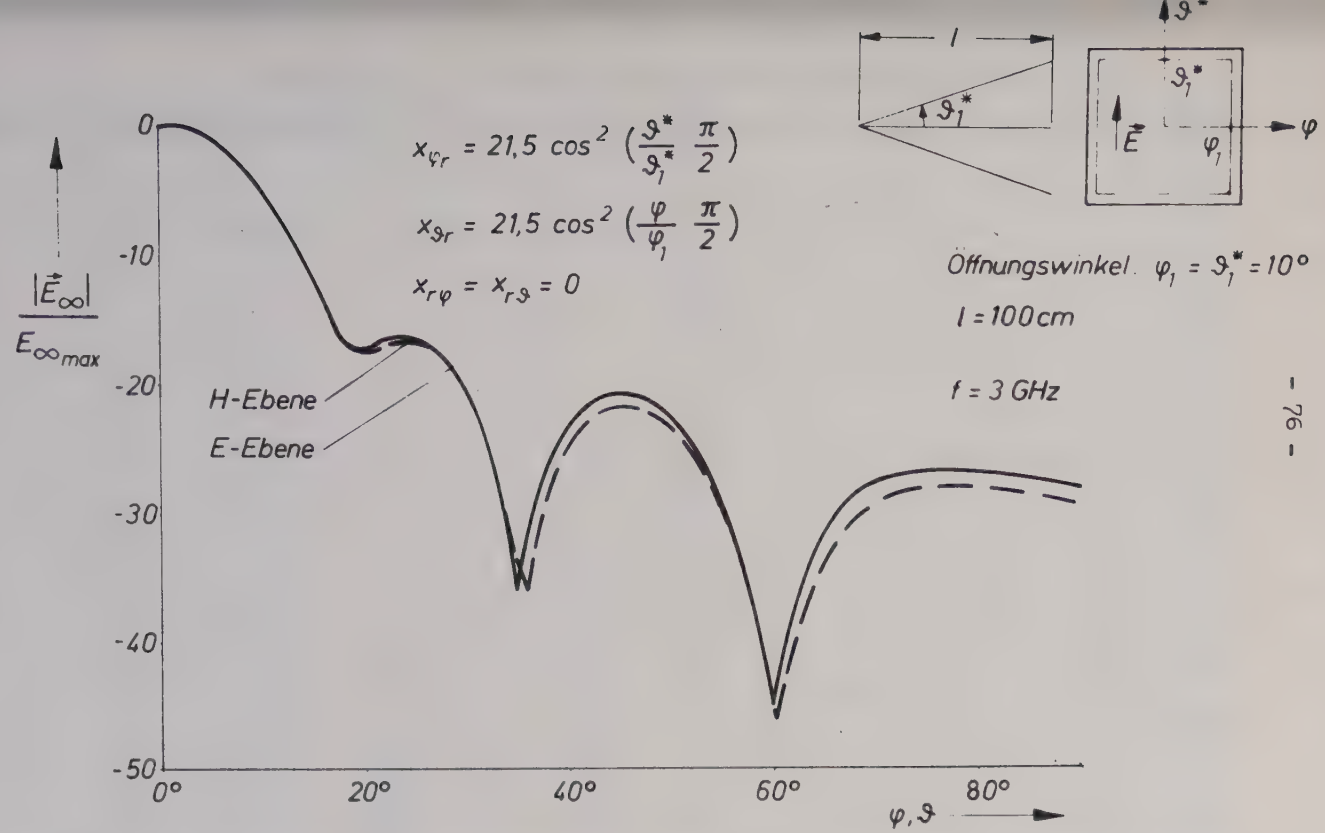
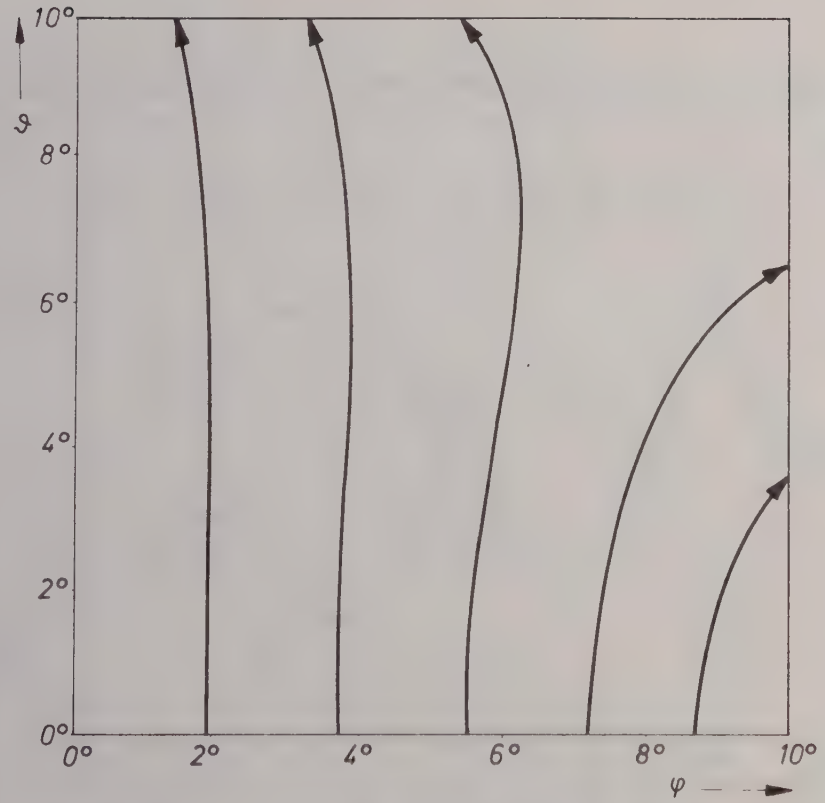


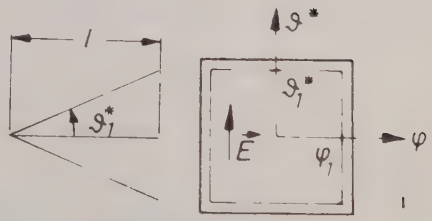
Bild 4.10 Richtdiagramm eines Kugelsektorhorns mit anisotroper Wandimpedanz



$$x_{\varphi r} = 21{,}5 \cos^2\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_1}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_{\vartheta r} = 21{,}5 \cos^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_{r\varphi} = x_{r\vartheta} = 0$$



Öffnungswinkel $\varphi_1 = \vartheta_1^* = 10°$

$l = 100\,cm$

$f = 3\,GHz$

Bild 4.11 Elektrisches Feld der H_{10}-Welle eines Kugelsektorhorns mit anisotroper Wandimpedanz in einem Viertel einer Kugelsektorfläche

Antenne. Dazu wurde der bisherige Hornstrahler mit den Öffnungswinkeln $\varphi_1 = \vartheta_1^* = 10^0$ und der Länge $l = 100$ cm zugrunde gelegt, wobei die Riefentiefe der Wände so gewählt war, daß die Wandimpedanz nach Gl. (4.60) bei $f = 3$ GHz realisiert ist. Bild 4.12 zeigt den mit EHKUGS berechneten Flächenwirkungsgrad q_F und die Differenz der 10-dB Breiten von E- und H-Diagramm im Bereich 2,4 - 3,09 GHz. Die Rechnung wurde nicht auf höhere Frequenzen ausgedehnt, da $x_{\varphi r}$ für $\varphi = 0$ und $x_{\vartheta r}$ für $\vartheta^* = 0$ bei 3,091 GHz unendlich und für größere f-Werte kapazitiv werden. Man sieht, daß eine gute Übereinstimmung zwischen E- und H-Diagramm nur in einem schmalen Frequenzband vorhanden ist, was wegen der starken Frequenzabhängigkeit der Riefenstruktur zu erwarten war.

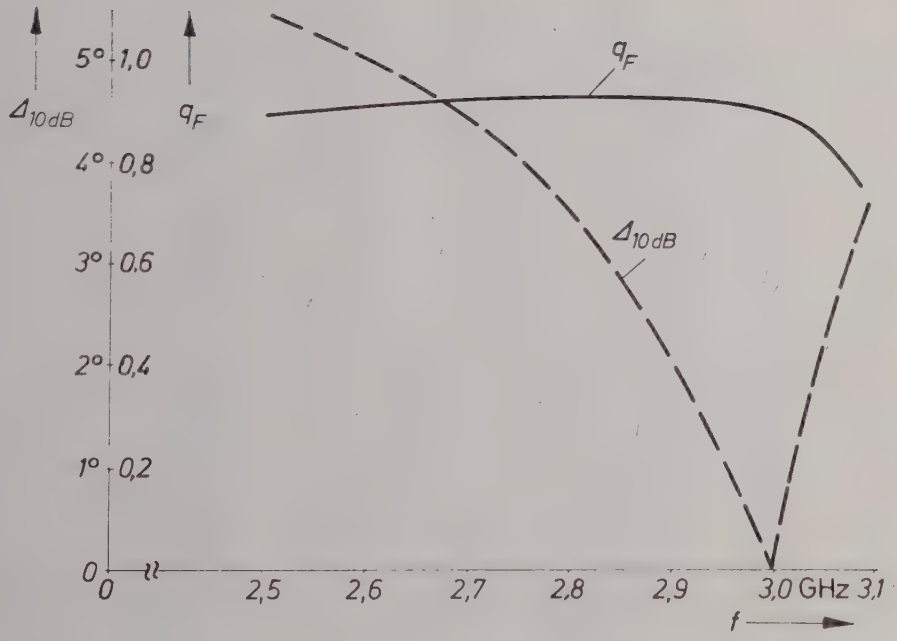
4.4.2 Kugelsektorhörner mit transversalen Riefen in den Wänden

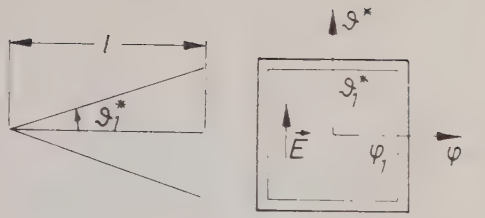
Während über Rundhohlleitungen und Kegelhörner mit transversalen Riefen eine Vielzahl von Untersuchungen existiert[1], gibt es bisher über Rechteckhohlleitungen und Pyramidenhörner mit solchen Wänden nur wenige Arbeiten. Eine für derartige Rechteckhohlleitungen mit Hilfe des Produktansatzes durchgeführte Berechnung der Eigenwellen [32] erweist sich als fehlerhaft [28]. In weiteren Arbeiten [33] - [35] wird ohne Begründung davon ausgegangen, daß bei der Anregung eines Pyramidenhornes mit transversalen Riefen durch eine H_{10}- oder H_{01}-Welle der Einfluß der Riefen an den Wänden parallel zum elektrischen Feld vernachlässigbar ist. Die so erhaltenen Ergebnisse für das Richtdiagramm stimmen indessen gut mit experimentell gewonnenen überein [33], wofür weiter unten die Begründung gegeben wird.

Zur Vereinfachung der Berechnungen wird hier ein Kugelsektorhorn zugrunde gelegt. Aufgrund der im Abschnitt 3.3.1 durchgeführten Diskussion ist zu erwarten, daß die Ergebnisse für nicht zu große

---

1) Eine ausführliche Zusammenstellung der Arbeiten über die in der englisch sprachigen Literatur "corrugated conical horns" genannten Antennen findet man in [31].





Öffnungswinkel: $\varphi_1 = \vartheta_1^* = 10°$

$l = 100\,cm$

$f = 3\,GHz$

Wandimpedanz bei 3 GHz:

$$x_{\varphi r} = 21{,}5 \cos^2\left(\frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_{\vartheta r} = 21{,}5 \cos^2\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x_{r\vartheta} = x_{r\varphi} = 0$$

Bild 4.12 Flächenwirkungsgrad q_F und Differenz der 10 dB Breite Δ_{10dB} des E- und H-Diagramms eines Kugelsektorhorns mit anisotroper Wandimpedanz in Abhängigkeit von der Frequenz

Öffnungswinkel φ_1 und ϑ_1^* auch für das entsprechende Pyramidenhorn gelten. Die Wandimpedanzen seien einheitlich

$$Z_{\varphi r} = Z_{\vartheta r} = 0 \ , \tag{4.61}$$

$$\frac{Z_{r\varphi}}{Z} = jx_{r\varphi} \quad \text{und} \tag{4.62}$$

$$\frac{Z_{r\vartheta}}{Z} = jx_{r\vartheta} \ . \tag{4.63}$$

Aus Gln. (4.61) - (4.63) folgt, daß Gl. (4.21) erfüllt ist, nicht aber Gl. (4.23). Die Anwendung des Produktansatzes ist also nur dann möglich, wenn $C_g = 1$, wenn also $kr \gg 1$ und $kr \gg \nu(\nu+1)$ sind. Zusätzlich muß ϑ_1^* so klein sein, daß $\sin\vartheta \approx 1$ gesetzt werden kann. Die Randbedingungen (4.17) - (4.20) lassen sich dann ähnlich wie in Abschnitt 4.3 durch Längsschnittwellen erfüllen. Für die LSH_ϑ-Welle ($E_\vartheta = 0$) ergibt sich aus Gl. (4.20)

$$C_H = -\frac{p}{q}\frac{C_E}{Z} \tag{4.64}$$

aus Gl. (4.18)

$$\left\{\begin{matrix}\cot(p\vartheta_1^*)\\ \tan(p\vartheta_1^*)\end{matrix}\right\} = \infty \tag{4.65}$$

und aus Gl. (4.19)

$$kr\, x_{r\vartheta} = \mp\, q \left\{\begin{matrix}\tan q\varphi_1\\ \cot q\varphi_1\end{matrix}\right\} . \tag{4.66}$$

Da für $C_g = 1$ die φ-Komponente des Magnetfeldes wegen $H_\varphi \sim E_\vartheta$ ebenfalls verschwindet, erhält man dieselben Gleichungen, wenn man von einer LSE_φ-Welle ausgeht. Entsprechend ergeben sich für eine LSH_φ- und eine LSE_ϑ-Welle die Gleichungen

$$C_H = \frac{q}{p}\,\frac{C_E}{Z} \tag{4.67}$$

$$\left\{\begin{matrix}\cot\, q\varphi_1\\ \tan\, q\varphi_1\end{matrix}\right\} = \infty \tag{4.68}$$

und

$$kr\, x_{r\varphi} = \mp\, p \left\{\begin{matrix}\tan\, p\vartheta_1^*\\ \cot\, p\vartheta_1^*\end{matrix}\right\} . \tag{4.69}$$

Die Gln. (4.66) und (4.69) werden auch in den oben zitierten Arbeiten [33] - [35] angegeben. Die dort nicht begründeten Annahmen sind also zulässig, solange $C_g \approx 1$ ist. Diese Bedingung wird auch von der Antenne erfüllt, an der die Messungen in [33] durchgeführt wurden, woraus sich die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment erklärt.

Im praktisch wichtigsten Fall $x_{r\vartheta} = x_{r\varphi} \to -\infty$ findet man für die tangentialen Feldkomponenten der Hauptwelle ($\vartheta_1^* > \varphi_1$) in der Apertur:

$$E_\varphi \sim \cos\left(\frac{\pi}{2\vartheta_1^*}\,\vartheta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2\varphi_1}\,\varphi\right) , \tag{4.70}$$

$$H_\vartheta = \frac{1}{Z}\,E_\varphi . \tag{4.71}$$

Die Feldverteilung in der Apertur und damit auch das Richtdiagramm sind also bei gleichen Öffnungswinkeln $\varphi_1 = \vartheta_1^*$ in E- und H-Ebene identisch. Die Antenne ist deshalb auch für Zirkularpolarisation geeignet. Das Richtdiagramm in E- und H-Ebene ist ferner gleich dem H-Diagramm eines Pyramidenhornes gleicher Öffnungswinkel und Länge mit vollkommen leitenden Wänden. Der Flächenwirkungsgrad einer aus dem Hornstrahler mit der Aperturverteilung nach Gln.(4.70) und (4.71) für $\vartheta_1^* = \varphi_1 \to 0$ entstehenden Hohlleitung beträgt $q_F \approx 0{,}81^2 \approx 0{,}66$.

Läßt man die eingangs gemachte Voraussetzung $kr \gg 1$ und $kr \gg \nu(\nu+1)$ fallen, dann kann man die Eigenschaften der Hauptwelle noch für C_g-Werte nach Gl. (4.3) untersuchen. Dabei wurde für ein Horn mit den Öffnungswinkeln $\varphi_1 = 10^\circ$ und $\vartheta_1^* = 20^\circ$ der Eigenwert Λ für die Wandimpedanzen $x_{r\vartheta} = x_{r\varphi} = -1{,}0$, $-3{,}16$, $-10{,}0$ und $-100{,}0$ mit EHKUGS bestimmt, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben. In Bild 4.13 ist der sich ergebende Verlauf von Λ in Abhängigkeit von C_g dargestellt. Zum Vergleich sind auch die für $C_g = 1$ aus Gl. (4.66) zusammen mit Gln. (4.3) und (4.16) berechneten Kurven eingezeichnet. Für $x_{r\vartheta} = x_{r\varphi} = -1$ ist der Verlauf von Λ in beiden Fällen ähnlich. Für $x_{r\varphi} = x_{r\vartheta} = -3{,}16$ hat man nur für $C_g > 0{,}55$ eine gewisse Übereinstimmung, für $x_{r\varphi} = x_{r\vartheta} = -10{,}0$ und $-100{,}0$ ergeben sich mit beiden Berechnungsmethoden völlig unterschiedliche Verläufe. Berechnet man nach beiden Verfahren das zugehörige Feld der Hauptwelle, dann erhält man bei kleinen Werten der Wandimpedanzen ($x_{r\vartheta} = x_{r\varphi} \approx -1{,}0$) nur geringfügige Abweichungen (< 10 %), während sich bei Wandimpedanzen $x_{r\vartheta} = x_{r\varphi} \leq -100{,}0$ für Eigenwerte $\Lambda > 103{,}0$ sehr unterschiedliche Verläufe ergeben. Soll die Feldverteilung im Bereich $(r_o - l_w) \leq r \leq r_o$ (s. Bild 4.1) von der durch Gln. (4.70) und (4.71) beschriebenen nicht mehr als 5 % abweichen, dann müssen $x_{r\varphi} = x_{r\vartheta} \leq -100$ und $C_g \geq 0{,}9$ sein. Mit den zugehörigen Λ-Werten folgt aus Bild 4.2, daß diese Bedingung erfüllt ist, wenn $k(r_o - l_w) \geq 23{,}8$ oder $(r_o - l_w)/\lambda \geq 3{,}8$ ist. Die entsprechende Berechnung für ein Horn mit den Öffnungswinkeln $\varphi_1 = \vartheta_1^* = 10^\circ$ ergibt, daß in diesem Fall $(r_o - l_w)/\lambda > 4{,}7$ sein muß.

Das oben entwickelte Rechenverfahren schließt auch die entsprechenden Hohlleitungen, deren Seitenlängen $a = 2r \sin\vartheta_1^*$ und $b = 2r \sin\varphi_1$ sind, ein. Da sich die Ergebnisse für die beiden Hörner nur geringfügig ändern, wenn man in EHKUGS $\sin\vartheta = 1$ setzt, lassen sich diese unmittelbar auf das jeweils korrespondierende Hohlleitungsproblem übertragen. Damit ergibt sich, daß bei

$$a = b \qquad a/\lambda > 1{,}7$$

und

$$a = 2b \qquad a/\lambda > 2{,}6$$

sein müssen, damit in der Apertur der Rechteckhohlleitung eine Feldverteilung nach Gln. (4.70) und (4.71) möglich ist.

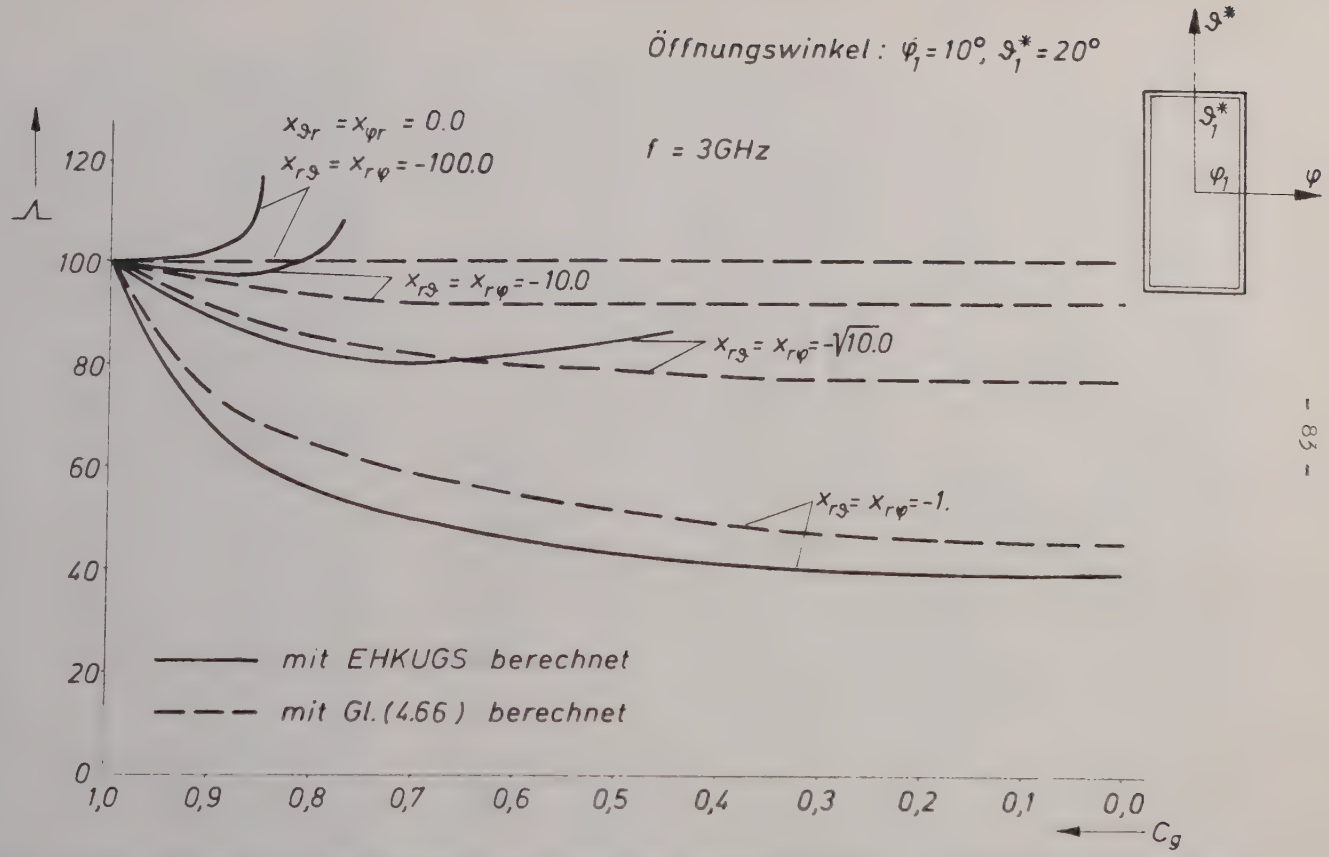


Bild 4.13 Eigenwert Λ der Hauptwelle eines Kugelsektorhorns mit transversalen Riefen in Abhängigkeit von C_g

Eine Bestätigung für diese Überlegungen liefert eine experimentelle Untersuchung des Strahlungsverhaltens eines Hornes mit transversalen Riefen in den Wänden, durch die bei 10 GHz die Wandimpedanzen $x_{r\varphi} = x_{r\vartheta} = -\infty$, $Z_{\varphi r} = Z_{r\varphi} = 0$ realisiert wurden [36]. Die Speisung erfolgte mit der H_{10}-Welle über eine sich stetig erweiternde Rechteckhohlleitung, die Öffnungsfläche des Horns betrug 46 x 46 mm^2. Durch die Messung von Sendeleistung P_s und reflektierter Leistung P_r wurde festgestellt, daß bei $f = 9{,}4$ GHz $a_s = 10 \lg P_r/P_s = -35$ dB, für $f = 10$ GHz $a_s \approx -1{,}7$ dB ist. Während der Verfasser das Horn für 10 GHz dimensioniert hatte, strahlt es bei dieser Frequenz praktisch nichts ab, da nahezu die gesamte Energie reflektiert wird. Nach den obigen Überlegungen ist dies auch zu erwarten, da die Öffnungsfläche zu klein ist und daher eine von Gln. (4.70) und (4.71) stark abweichende Feldverteilung im Horn die Anpassung an die Speisehohlleitung verhindert.

5. Experimenteller Teil

5.1 Meßverfahren

5.1.1 Messung des Feldes in der Apertur

Als Meßmethoden zur Ausmessung des Feldes in der Apertur von Hornstrahlern bieten sich das Sonden- und das Streukörperverfahren an. Bei ersterem wird das auszumessende Feld mit einer kleinen Antenne, z.B. mit einem kleinen Dipol abgetastet. Meßfehler entstehen bei dieser Methode besonders dadurch, daß die Sondenleitung das zu untersuchende Feld stört und die Sonde auch auf andere Feldkomponenten als die erwünschte ansprechen kann. Diese Nachteile werden bei der Streukörpermethode [37], [38] weitgehend vermieden, die in zunehmendem Maße zur Ausmessung von Antennennahfeldern verwendet wird. Bei diesem Verfahren

wird ein kleiner Streukörper, meist in der Form eines metallischen Dipols, in das zu untersuchende Feld gebracht. Das vom Streukörper zugestreute Signal hängt von dessen Lage sowie von der Amplitude und Phase des Feldes am Ort des Streukörpers ab. Unter der Voraussetzung, daß der Streukörper ein gegen die Wellenlänge kurzer dünner Draht ist, ist das zurückgestreute Signal U_s proportional dem Quadrat der parallel zum Draht liegenden Feldstärkekomponente E_d [39], also

$$U_s \sim E_d^2 .$$

Um U_s bei der Auswertung von anderen Streusignalen trennen zu können, wird es durch eine niederfrequente Modulation gekennzeichnet [38], [40]. Das kann dadurch geschehen, daß der Streukörper mit einer nichtlinearen Impedanz, meist realisiert durch eine Diode, belastet wird, deren Kennwerte durch eine Wechselspannung periodisch verändert werden. Die Zuführung der Wechselspannung erfolgt über einen graphitbeschichteten Nylonfaden.

Eine geeignete Methode zur Bestimmung von Betrag und Phase des zu messenden Feldes aus dem rückgestreuten Signal wurde von King [41] vorgeschlagen. Eine entsprechende Anordnung, wie sie hier verwendet wird, ist in Bild 5.1 dargestellt. Der Generator (Frequenz 2,6 - 4 GHz, Leistung ca. 2 W) speist eine Mikrowellenbrücke, an dessen Meßzweig das zu untersuchende Horn über das T-Hybrid I angekoppelt ist. Das vom Streukörper zurückgestreute modulierte Signal gelangt zum Tor 1 des T-Hybrids II. Tor 4 wird über den Referenzzweig der Brücke ein Signal zugeführt, dessen Amplitude und Phase sich mit dem variablen Dämpfungsglied α_r und dem Phasenschieber φ_r einstellen lassen. Tor 2 ist reflexionsfrei, Tor 3 mit einer Diode abgeschlossen. Unter der Voraussetzung der allseitigen Anpassung und der vollständigen Entkopplung von Sende- und Empfangspfad im T-Hybrid I sowie von Tor 1 und 4 im T-Hybrid II liegt an der Diode die Spannung U, die sich aus zwei Anteilen zusammensetzt:

$$U_1 = U_r \cos(\omega t + \varphi_r)$$

$$U_2 = U_s(1 + m \cos \Omega t) \cos(\omega t + \varphi_o).$$

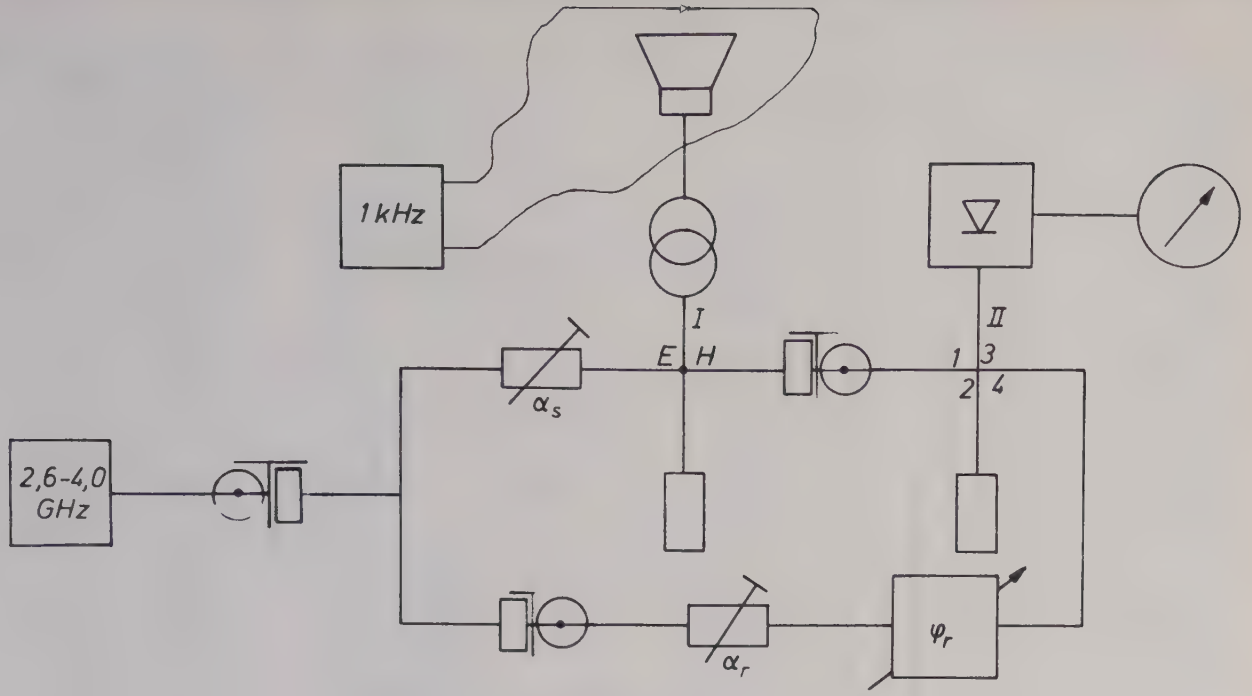


Bild 5.1 Aufbau zur Ausmessung des Feldes in der Apertur

In dieser Gleichung bedeuten

U_r die Amplitude des Referenzsignals

φ_r die Phase des Referenzsignals

U_s die Amplitude des Streukörpersignals

φ_s die Phase des Streusignals

m der Modulationsgrad des Streukörpersignals

Ω die Modulationsfrequenz

ω die Sendefrequenz

U_r wird so groß gewählt, daß der Zusammenhang zwischen U_s und dem zugehörigen Diodenstrom I_s linear ist. Damit ist sichergestellt, daß stets $U_r \gg U_s$ ist. Dann erhält man unter der Voraussetzung, daß der nachgeschaltete 1 kHz Verstärker nur die Schwingungsanteile der Modulationsfrequenz Ω überträgt, für das Demodulationssignal U_d

$$U_d = K_d U_s m \cos(\varphi_s + \varphi_r) \cos \Omega t , \qquad (5.1)$$

wobei der Wert K_d von der Kennlinie der Diode bestimmt wird. Die Kontrolle, ob U_s und damit U_d tatsächlich proportional zur Amplitude des Sendesignals sind, erfolgt mit dem vor dem T-Hybrid I liegenden geeichten Dämpfungsglied a_s. Eine Meßreihe beginnt damit, daß für eine bestimmte Ausgangslage des Streukörpers, z.B. in der Mitte der Apertur, der Phasenschieber φ_r im Referenzzweig so eingestellt wird, daß

$$\cos(\varphi_s + \varphi_r) = \pm 1$$

ist, $|U_d|$ also ein Maximum wird. Wiederholt man diesen Phasenabgleich für andere Positionen des Streukörpers in der Apertur, so ergibt sich punktweise ein zu $|U_s|$ proportionaler Verlauf.

Wesentliche Voraussetzung für die Gültigkeit der Gl. (5.1) ist, daß die Entkopplung von Sende- und Empfangspfad im T-Hybrid I

genügend hoch ist. Da T-Hybride in koaxialer Technik keine hohe Entkopplung aufweisen, wurde dieser Teil der Brücke aus Hohlleitungsteilen aufgebaut. Mit Hilfe eines Gleitschraubentransformators konnte ohne Schwierigkeiten eine Entkopplung von 80 dB zwischen Sende- und Empfangspfad erreicht werden.

Um Störungen der Messungen durch die Umgebung möglichst gering zu halten, wurden nur der auszumessende Hornstrahler und die Vorrichtung zur Führung des Streukörpers in dem reflexionsarmen Meßraum des Instituts [42] gebracht. Der graphitbeschichtete Nylonfaden, durch den die Diode mit der 1 kHz-Wechselspannung versorgt wurde, war in einen Holzrahmen eingehängt (Bild 5.2), der bei der Ausmessung des Aperturfeldes verschoben wurde. Die als

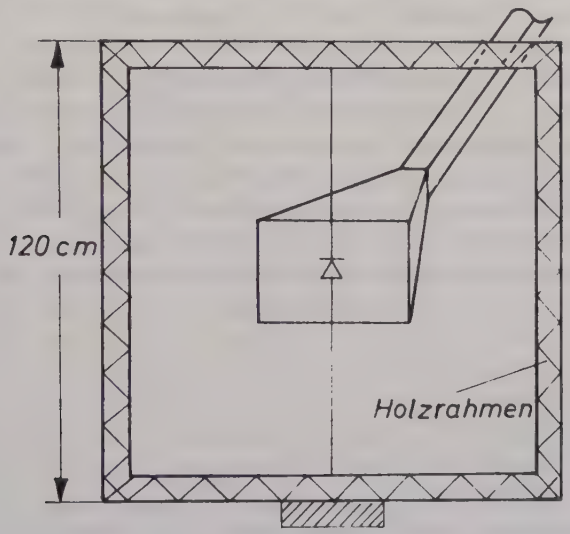


Bild 5.2

Streukörper verwendeten Dipole besaßen eine Länge von maximal $\lambda_o/4$. Um eine für die Auswertung von U_s hinreichend hohe Rückstreuleistung zu erreichen, wurden sie durch Anlöten kleiner metallischer Plättchen an beiden Enden auf die Sendefrequenz abgestimmt [43]. Um zu untersuchen, wie stark das zurückgestreute mit 1 kHz modulierte Signal nicht nur von der elektrischen

Feldkomponente parallel zum Streukörper, sondern auch von den dazu senkrecht beeinflußt wird, wurde der Streukörper zuerst parallel zu y und dann parallel zu z (siehe Bild 3.2) in der Mitte der Öffnung eines Pyramidenhorns aufgehängt, da dort aus Symmetriegründen E_z gleich Null sein muß. Im zweiten Fall konnte mit der vorliegenden Apparatur, deren Dynamik 30 dB beträgt, kein Feld mehr nachgewiesen werden. Die Anzeige von senkrecht zum Streukörper liegenden elektrischen Feldkomponenten wird also um mindestens 30 dB herabgesetzt.

5.1.2 Messung der Richtcharakteristik

Zur Messung der Richtcharakteristik[1)] wurde in bekannter Weise [44] die zu untersuchende Antenne im Fernfeld einer beliebigen Antenne - hier einem Pyramidenhorn - gedreht und dabei die Empfangsleistung in Abhängigkeit vom Drehwinkel registriert. Sende- und Empfangsantenne waren im reflexionsarmen Meßraum in dem durch die Fernfeldbedingung für die Ausmessung von Antennen gegebenen Abstand angeordnet. Als Empfänger diente der Überlagerungsempfänger eines Spektrumanalysators mit einer Dynamik von 48 dB. Von jeder Antenne wurde zum Vergleich mit der Rechnung das E- und H-Diagramm aufgenommen.

5.2 Meßergebnisse

5.2.1 Pyramidenhorn mit vollkommen leitenden Wänden

Bei der Berechnung des Richtdiagramms wurde bisher davon ausgegangen, daß im Horn nur die Hauptwelle angeregt wird und die Wirkung der Ströme auf der Außenwand vernachlässigt werden kann. Durch die Messung des Feldes in der Apertur und des Richtdiagramms sollte überprüft werden, inwieweit diese Annahmen zu

---

1) Die Definition der Richtcharakteristik erfolgte durch Gln. (2.3) und (2.4).

brauchbaren Ergebnissen führen. Die Messungen wurden an einem Pyramidenhorn aus Messing mit den Öffnungswinkeln $\varphi_1 = 10{,}9^\circ$ und $\vartheta_1^* = 16{,}3^\circ$ und der Länge $l = 59$ cm entsprechend dem in Abschnitt 4.3 berechneten Beispiel ausgeführt. Die Meßfrequenz variiert von 2,6 - 3,9 GHz (S-Band). Die Anregung des Horns erfolgte über die Rechteckhohlleitung des S-Bandes (72,14 mm x 34,04 mm), wobei der E-Vektor der H_{10}-Welle parallel zur y-Richtung liegt (s. Bild 5.2). Um zu sehen, welche Wellentypen im Horn tatsächlich angeregt werden, wird das Aperturfeld längs der Symmetrielinien parallel zur y- und z-Achse gemessen. Die Bilder 5.3 bis 5.6 geben die Ergebnisse für 2,6; 3,0; 3,4 und 3,8 GHz wieder. Der Verlauf von E_y in Abhängigkeit von z (H-Ebene) wird in allen Fällen hauptsächlich durch die H_{10}-Welle bestimmt. Außer bei 2,6 GHz zeigt sich zusätzlich der Einfluß zumindestens eines höheren Wellentyps, dessen Amplitude ungefähr 5 % der der H_{10}-Welle ist. In der E-Ebene erwartet man einen sehr steilen Abfall von E_y als Funktion von y, sobald man über den Rand des Horns hinausgeht. Der im Bereich der Kante gemessene Verlauf gibt diesen Abfall wahrscheinlich nicht richtig wieder [45], da der Streukörper wegen seiner endlichen Ausdehnung ($\approx \lambda_o/4$) keine punktförmige Messung ermöglicht. Die vom Streukörper zurückgestreute Leistung wird vielmehr einem Mittelwert des Feldes über die Länge der Sonde proportional sein. Wenn sich das Feld, wie im vorliegenden Fall in Richtung des Meßdipols stark ändert, ist sein wahrer Verlauf auf diese Weise nicht meßbar. Deutlich erkennbar ist in allen Fällen wiederum das Vorhandensein von zumindest einem höheren Wellentyp. Um dessen Natur zu ermitteln, wurde $|E_\vartheta|$ wiederum längs der beiden Symmetrielinien der Öffnung gemessen, wobei der Streukörper in jedem einzelnen Punkt parallel zu E_ϑ ausgerichtet werden mußte. Es zeigte sich, daß $|E_\vartheta|$ mit der beschriebenen Apparatur nicht meßbar war, d.h. also stets mindestens 30 dB unter dem maximalen Wert von $|E_y|$ lag in Übereinstimmung mit anderen Beobachtungen [45]. Das elektrische Feld in der kugelsektorförmigen Apertur besitzt also nur eine φ-Komponente, die eine Funktion sowohl von φ als auch von ϑ^* ist. Die höheren Wellentypen sind folglich $LSH_{\vartheta m,n}$-Wellen. In der folgenden Tabelle sind die Indizes m, n der bei den verschiedenen Frequenzen neben der H_{10}-Welle erkennbaren Wellentypen zusammengestellt.

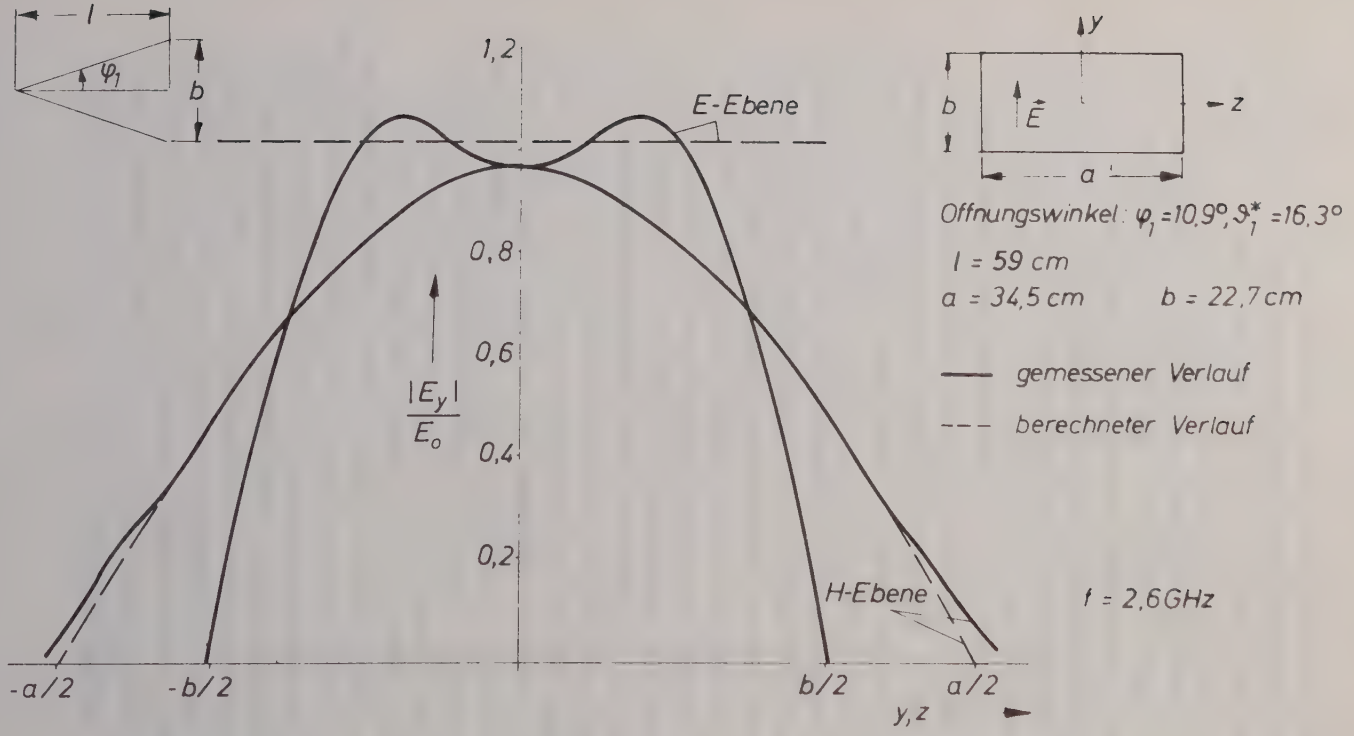


Bild 5.3 Verlauf des elektrischen Feldes in der Öffnung eines Pyramidenhorns mit vollkommen leitenden Wänden in der E- und H-Ebene

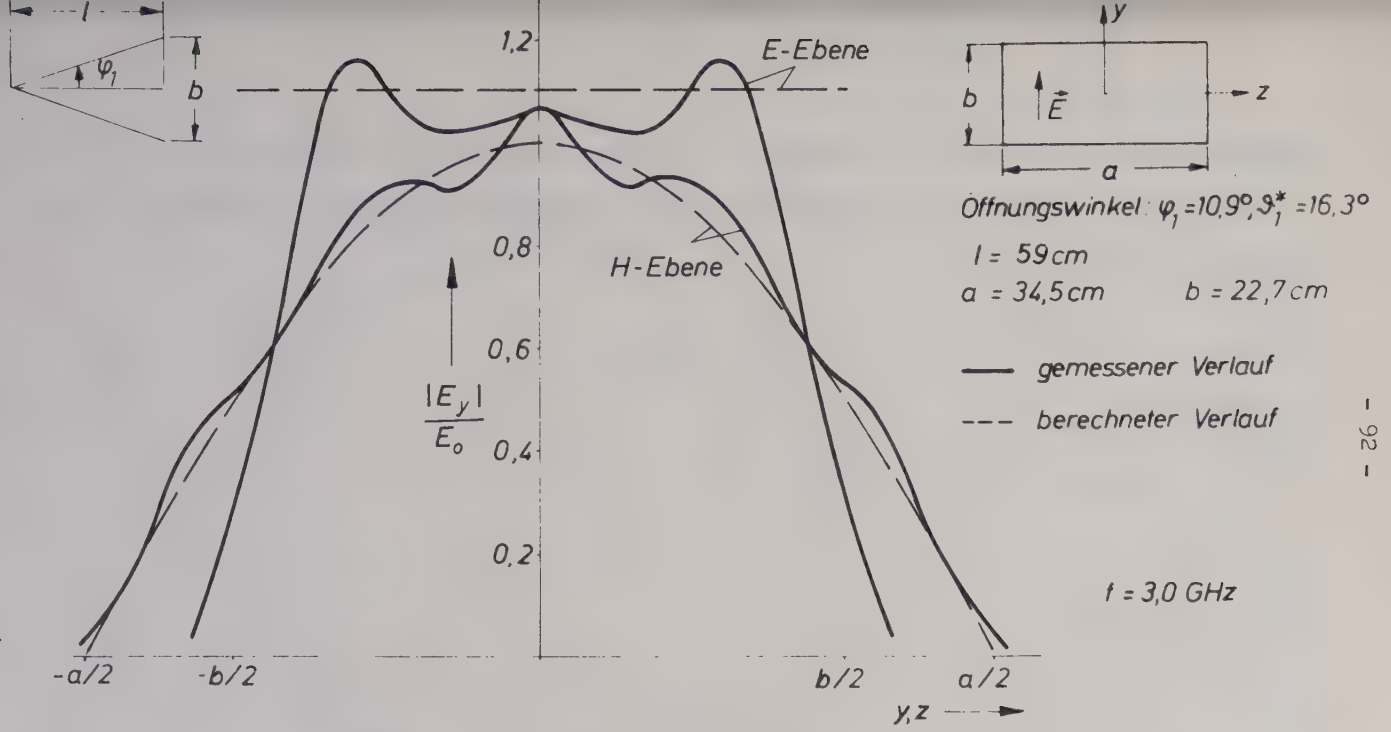


Bild 5.4 Verlauf des elektrischen Feldes in der Öffnung eines Pyramidenhorns mit vollkommen leitenden Wänden in der E- und H-Ebene

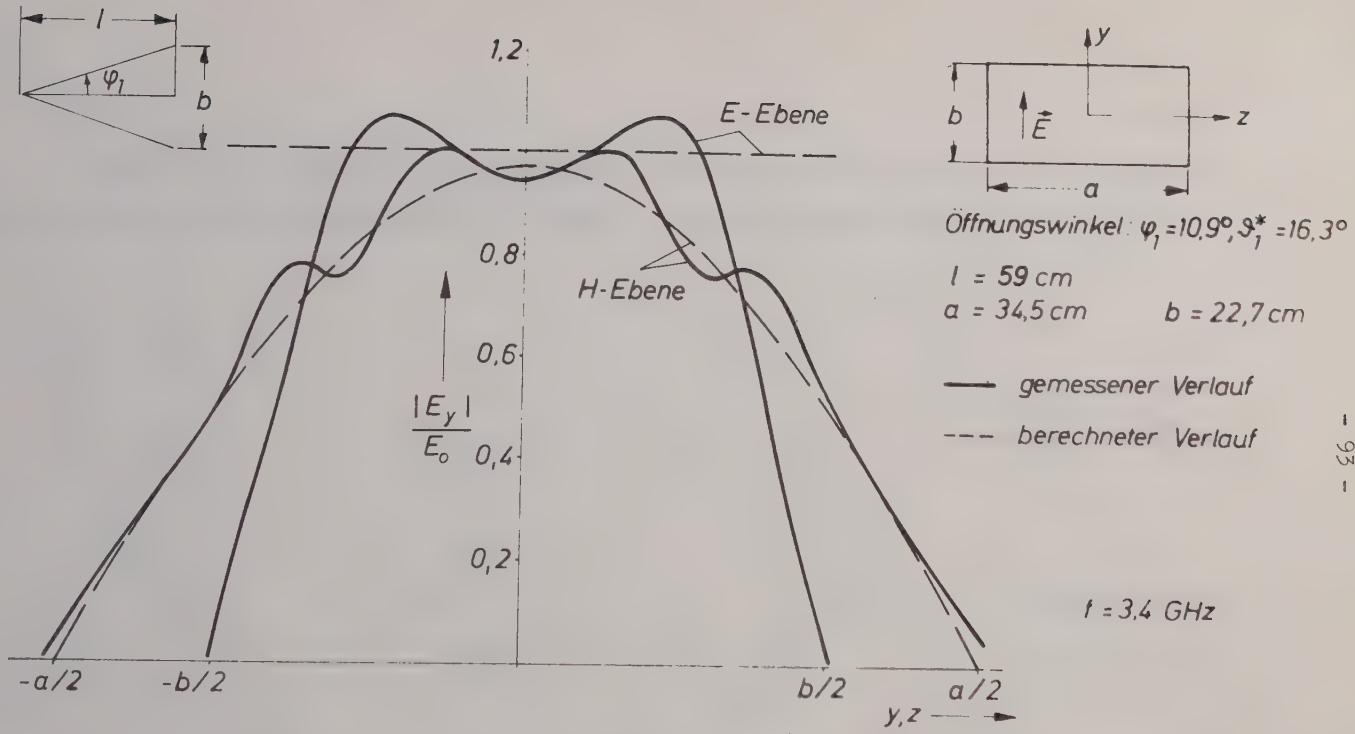


Bild 5.5 Verlauf des elektrischen Feldes in der Öffnung eines Pyramidenhorns mit vollkommen leitenden Wänden in der E- und H-Ebene

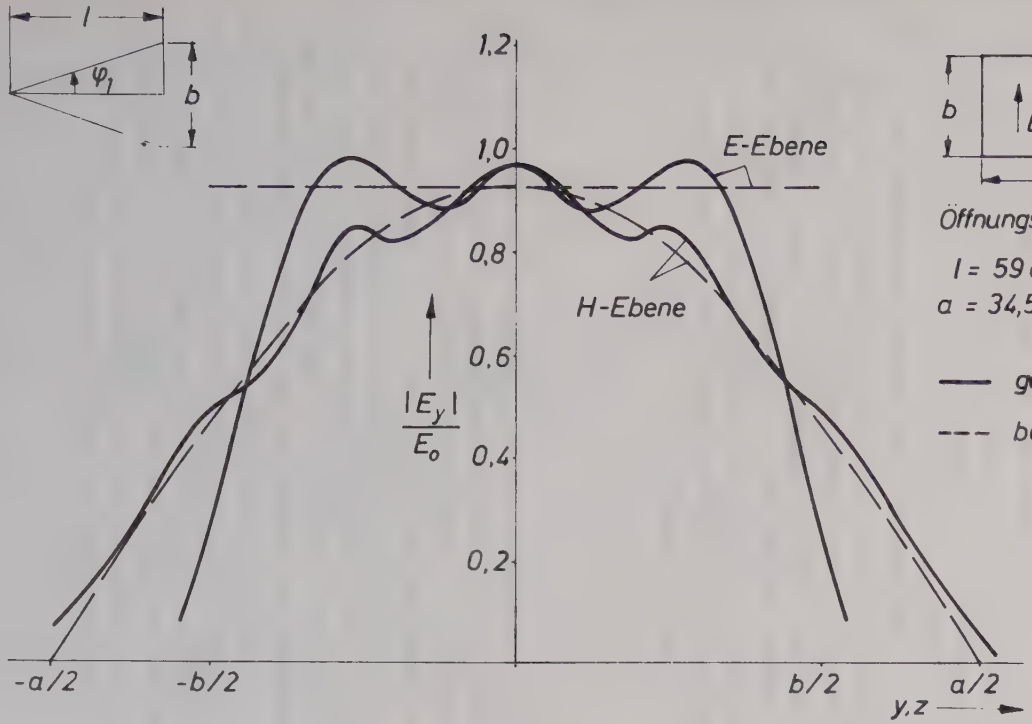


Bild 5.6 Verlauf des elektrischen Feldes in der Öffnung eines Pyramidenhorns mit vollkommen leitenden Wänden in der E- und H-Ebene

f/GHz	2,6	3,0	3,4	3,8
m	-	13	11	13
n	6	6	4	8

Für die obigen Fälle wurden auch die Richtdiagramme ausgehend von Gl. (2.4) unter Verwendung der mit HSOR bestimmten Feldverteilung der H_{10}-Welle berechnet. In den Bildern 5.7 bis 5.10 sind sie zusammen mit den Messungen im Bereich $0 \leq \vartheta^* \leq 90^\circ$ und $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ dargestellt. Man sieht, daß die Rechnung trotz der gemachten Vereinfachungen nicht nur die Form der Hauptkeulen sondern auch die Lage und Höhe der ersten Nebenmaxima sehr gut liefert. Für 2,6 GHz ist in Bild 5.11 das Richtdiagramm auch für den rückwärtigen Strahlungsraum (ϑ^* und $\varphi > 90^\circ$) wiedergegeben. Hier hat man erwartungsgemäß keine Übereinstimmung. Der Einfluß der höheren Wellentypen in der Öffnung und der Ströme auf der Außenwand ist nämlich in diesem Bereich nicht mehr vernachlässigbar [46], [47]. Das gleiche Verhalten wurde auch bei den anderen Frequenzen beobachtet.

5.2.2 Kugelsektorhorn mit zwei isotropen induktiven Wänden

Das im letzten Abschnitt verwendete Pyramidenhorn wurde an seinen beiden Schmalseiten mit einer dielektrischen Schicht versehen, so daß die Wände eine isotrope Wandimpedanz aufwiesen. Dieses Pyramidenhorn kann nach den im Abschnitt 4.3 aufgeführten Ergebnissen als Kugelsektorhorn behandelt werden, womit man ohne großen konstruktiven Aufwand auch ein experimentelles Beispiel für ein Kugelsektorhorn mit von Null verschiedener Wandimpedanz hat. Das Potential der Hauptwelle ist nach Gl. (4.45) proportional $\sin(p\vartheta^*)$, wobei nach Gl. (4.39) p Werte zwischen $\pi/2\vartheta_1^*$ und 0 annehmen kann, wenn $jx_{r\varphi} = Z_{r\varphi}/Z_o$ im Bereich $0 \leq jx_{r\varphi} \leq j\infty$ liegt. Die Antenne wurde so dimensioniert, daß für f = 3,5 GHz p = 0, also $x_{r\varphi} = \infty$ ist. Aus der im Anhang Abschnitt 7.1.1 angegebenen Gleichung für die Wandimpedanz der dielektrisch beschichteten Wand erhält man, daß die Dicke d des Dielektrikums

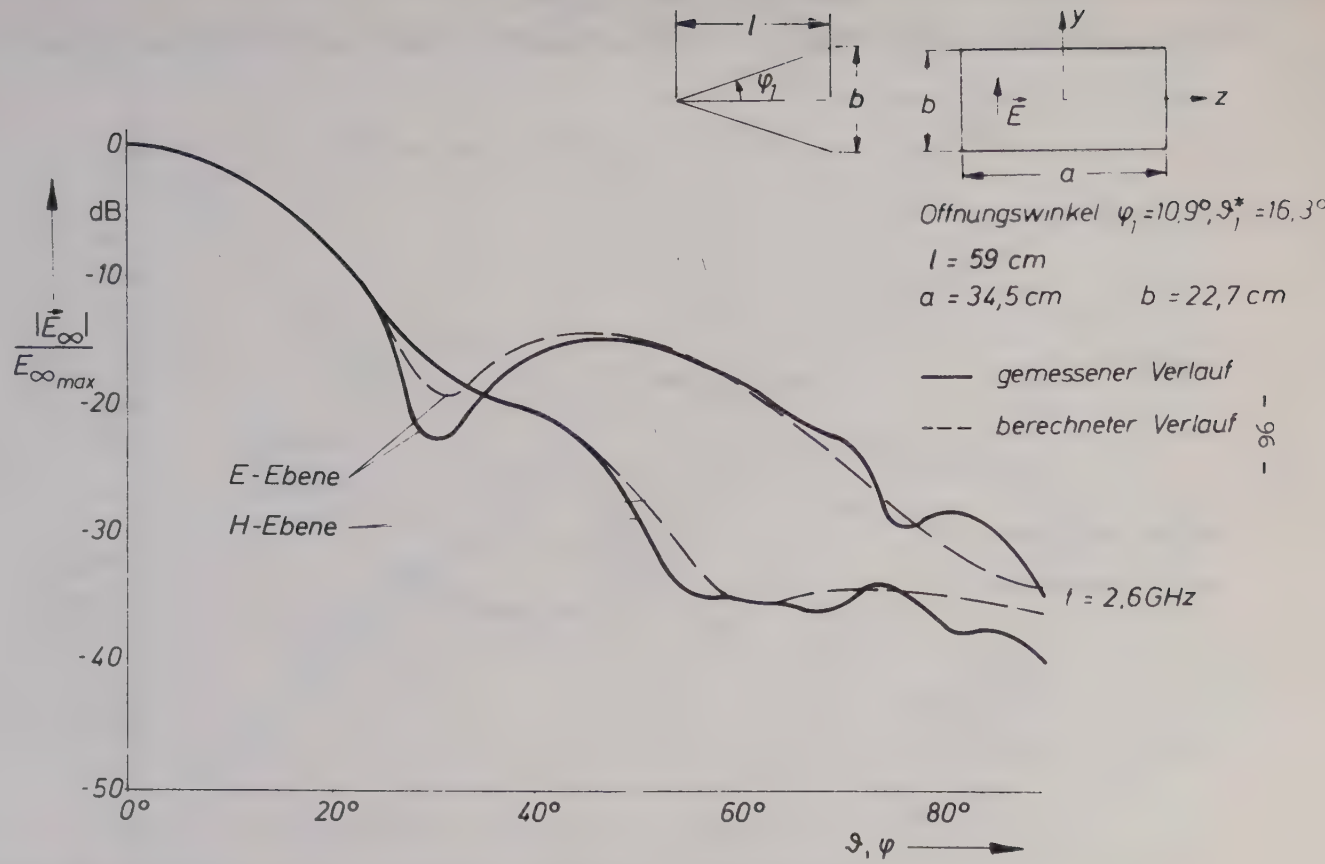


Bild 5.7 Richtdiagramm eines Pyramidenhorns mit vollkommen leitenden Wänden in E- und H-Ebene

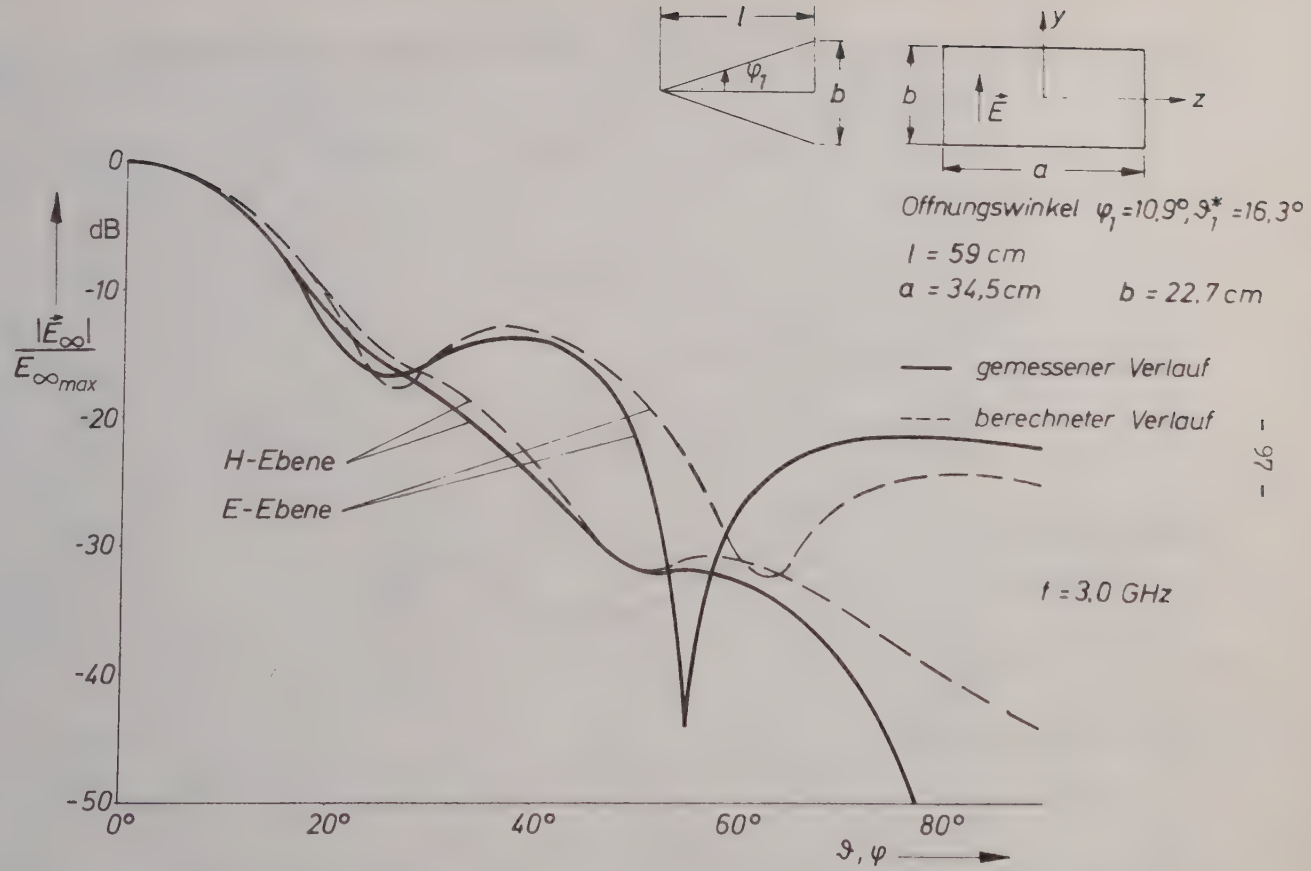


Bild 5.8 Richtdiagramm eines Pyramidenhorns mit vollkommen leitenden Wänden in E- und H-Ebene

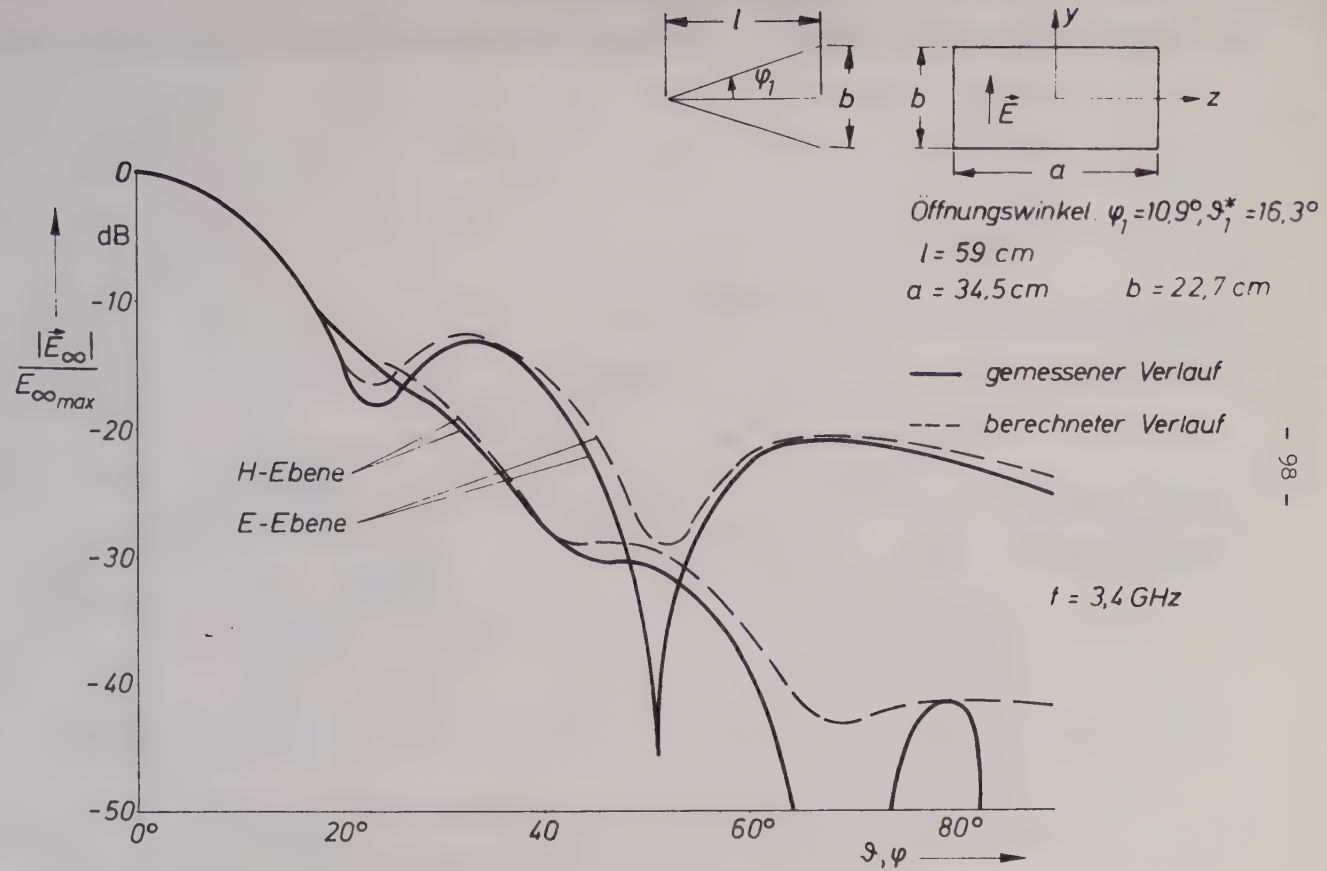


Bild 5.9 Richtdiagramm eines Pyramidenhorns mit vollkommen leitenden Wänden in E- und H-Ebene

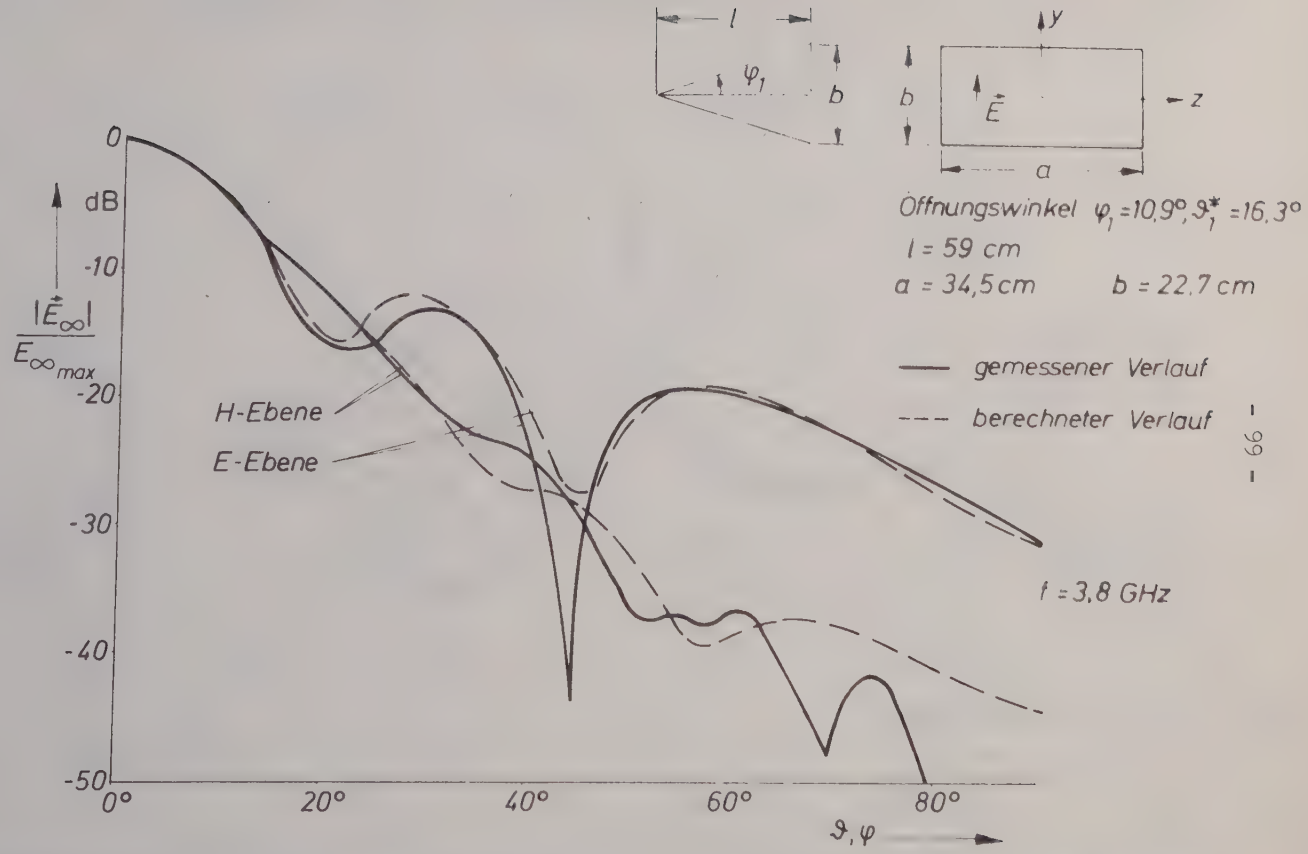


Bild 5.10 Richtdiagramm eines Pyramidenhorns mit vollkommen leitenden Wänden in E- und H-Ebene

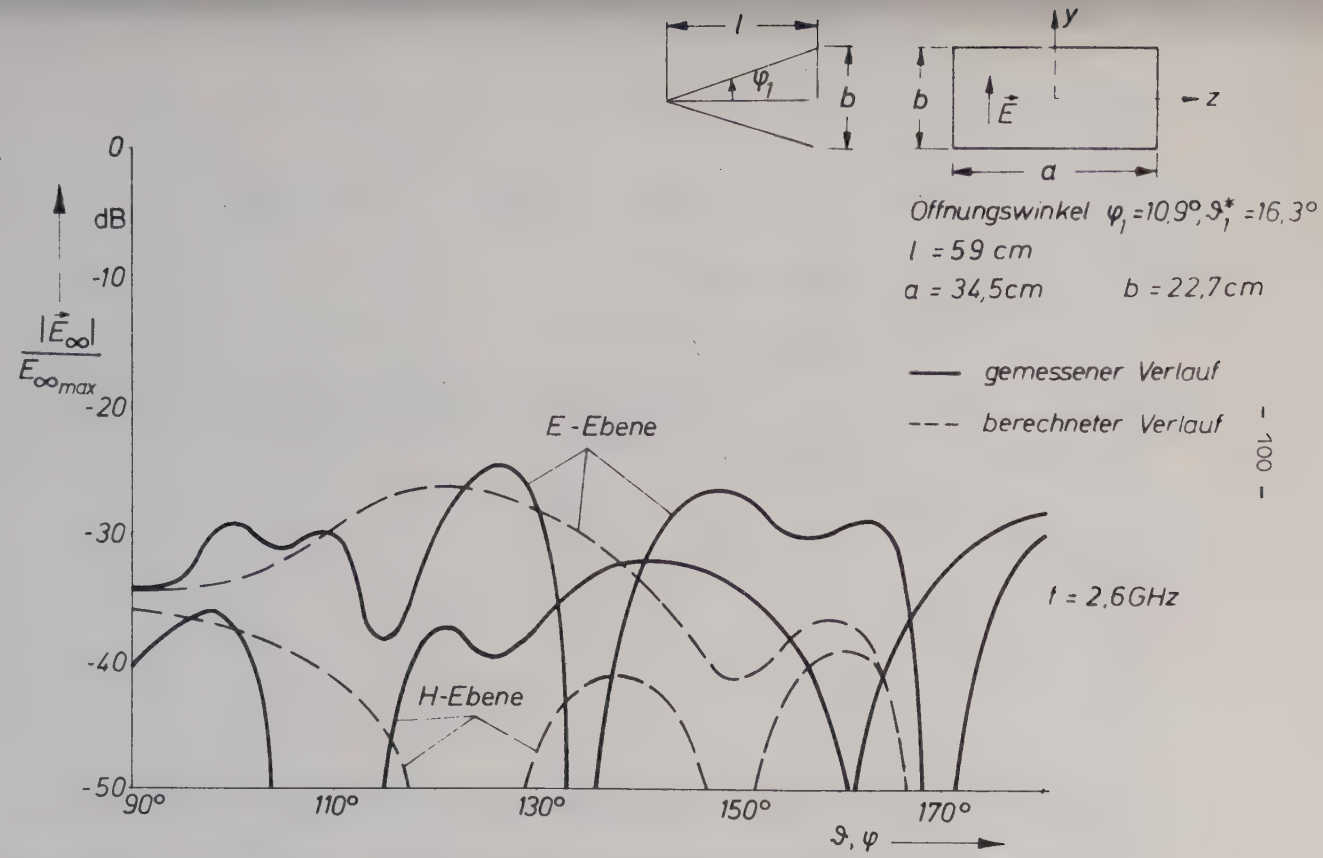


Bild 5.11 Richtdiagramm eines Pyramidenhorns mit vollkommen leitenden Wänden im rückwärtigen Strahlungsraum

$$d = \frac{\lambda}{4}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_r - 1}}$$

sein muß. Bei der Verwendung von Polyäthylen ($\varepsilon_r = 2{,}29$) ergibt sich

$$d = 20 \text{ mm} .$$

Die Speisung der Antenne erfolgt wieder mit einer Rechteckhohlleitung, in der nur die H_{10}-Welle ausbreitungsfähig ist. In einem ersten Versuch wurde einem früheren Vorschlag folgend [48] der Übergang von der Hohlleitung auf das beschichtete Horn durch ein allmähliches Anwachsen der Schichtdichte von der Hohlleitung zur Hornöffnung hin bewerkstelligt (s. Bild 5.12). Beim Ausmessen des

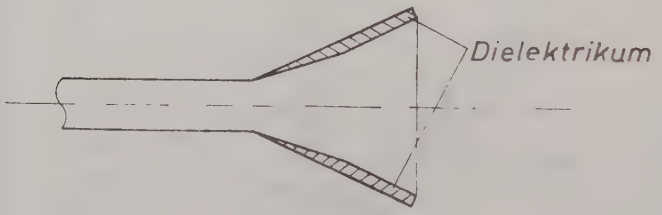


Bild 5.12

Aperturfeldes zeigte sich, daß bei dieser Konstruktion des Übergangs im Horn die Hauptwelle nur schwach, höhere Wellentypen jedoch stark angeregt werden. Zwischen die speisende H_{10}-Rechteckhohlleitung und das Horn wurde daher ein Übergangsstück (Bild 5.13) geschaltet, in dem im Frequenzbereich von 2,6 - 3,9 GHz alle Wellentypen mit Eigenwerten größer als der der Hauptwelle nicht ausbreitungsfähig sind. An einer Fläche mit induktiver Wandimpedanz können sich auch Oberflächenwellen ausbreiten, die eine Komponente des elektrischen Feldes in Ausbreitungsrichtung besitzen. Durch Aperturfeldmessungen ergab sich indessen, daß diese Wellentypen nicht angeregt werden.

Die Durchführung der Messungen erfolgte wie in Abschnitt 5.2.1. Auch im vorliegenden Fall war die Amplitude von E_ϑ so klein,

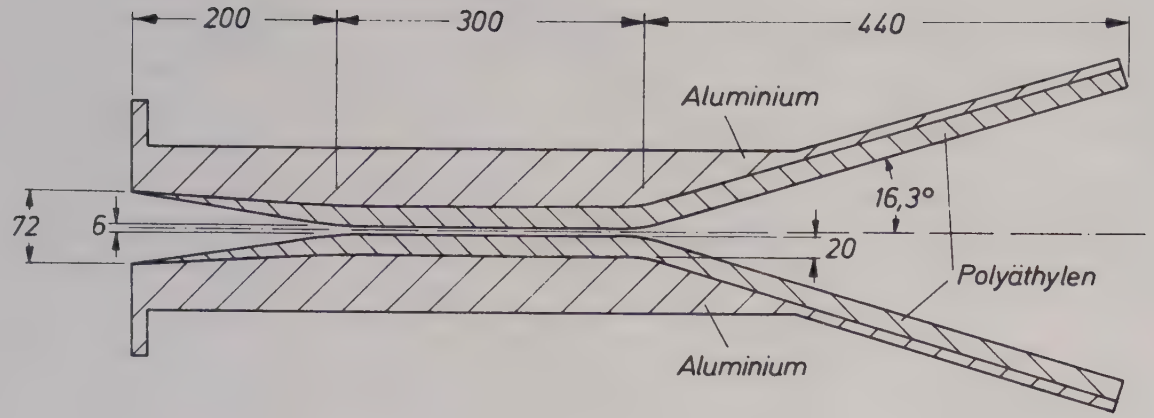


Bild 5.13 Konstruktion des Pyramidenhorns mit zwei induktiven Wänden

daß sie nicht mehr registriert werden konnte. Die Ergebnisse für $|E_y(y)|$ unterscheiden sich nur geringfügig von den beim leeren Horn gemessenen. Den Verlauf von $|E_y|$ in Abhängigkeit von z bei den Frequenzen 2,6; 2,8; 3,0; 3,2 und 3,3 GHz kann man aus den Bildern 5.14 - 5.18 entnehmen, in denen zusätzlich die aus der Rechnung erhaltenen Kurven für die Hauptwelle eingetragen sind. In der folgenden Tabelle sind die Indizes m und n der bei den verschiedenen Frequenzen neben der Hauptwelle (H_{10}-Welle) hauptsächlich auftretenden Wellentypen aufgeführt.

f/GHz	2,6	2,8	3,0	3,2	3,3
m	9	2 u.13	2 u.13	2 u.13	2 u.13
n	6	6	6	4	4

Die Amplituden dieser Wellentypen betragen etwa das 0,03 - 0,09-fache der Amplitude der H_{10}-Welle. Wenn der Aufbau der gesamten Struktur - wie angestrebt - exakt symmetrisch zur y- und z-Achse ist, können bei der Speisung durch eine H_{10}-Welle nur Wellentypen angeregt werden, bei denen m eine ungerade Zahl ist. Das Auftreten von m = 2 zeigt also, daß bei der Herstellung des Hornes geringe Abweichungen vom symmetrischen Aufbau nicht vermieden werden konnten.

Das Fernfeld wurde bei denselben Frequenzen wieder in der H-Ebene ($\varphi = 0$) gemessen. Die Ergebnisse sind in den Bildern 5.19 - 5.23 dargestellt. Zum Vergleich mit eingezeichnet wurde zusätzlich der Verlauf, wie er sich mit Hilfe des Rechenprogramms EHKUGS unter der Annahme, daß nur die H_{10}-Welle angeregt wird, ergibt. Man sieht, daß das Richtdiagramm im Bereich $-60^\circ \leq \vartheta^* \leq +60^\circ$ im wesentlichen durch die H_{10}-Welle bestimmt wird. Die Abweichung zwischen beiden Kurven beträgt an der Stelle des ersten Nebenmaximums maximal 1,0 dB. Die Lage der ersten beiden Minima ist in gemessenen und berechneten Kurven ungefähr gleich.

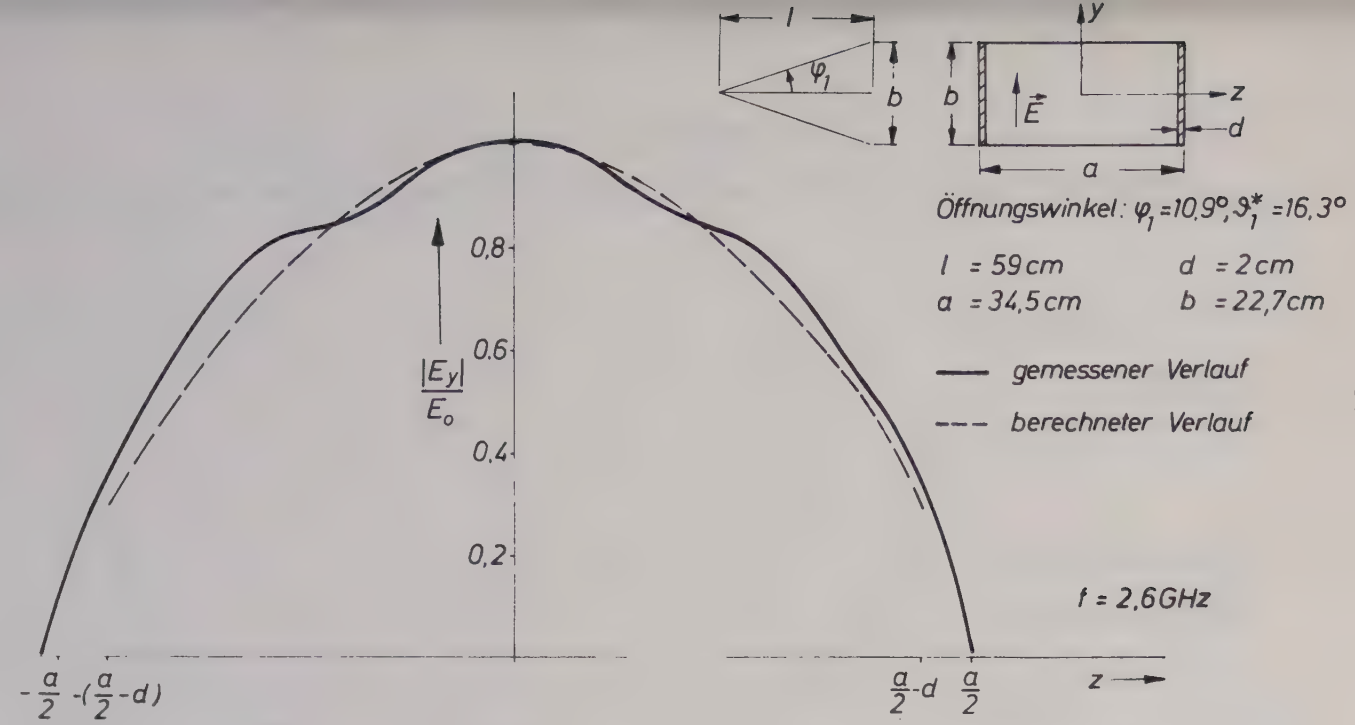


Bild 5.14 Verlauf des elektrischen Feldes in der Öffnung eines Pyramidenhorns mit zwei induktiven Wänden in der H-Ebene

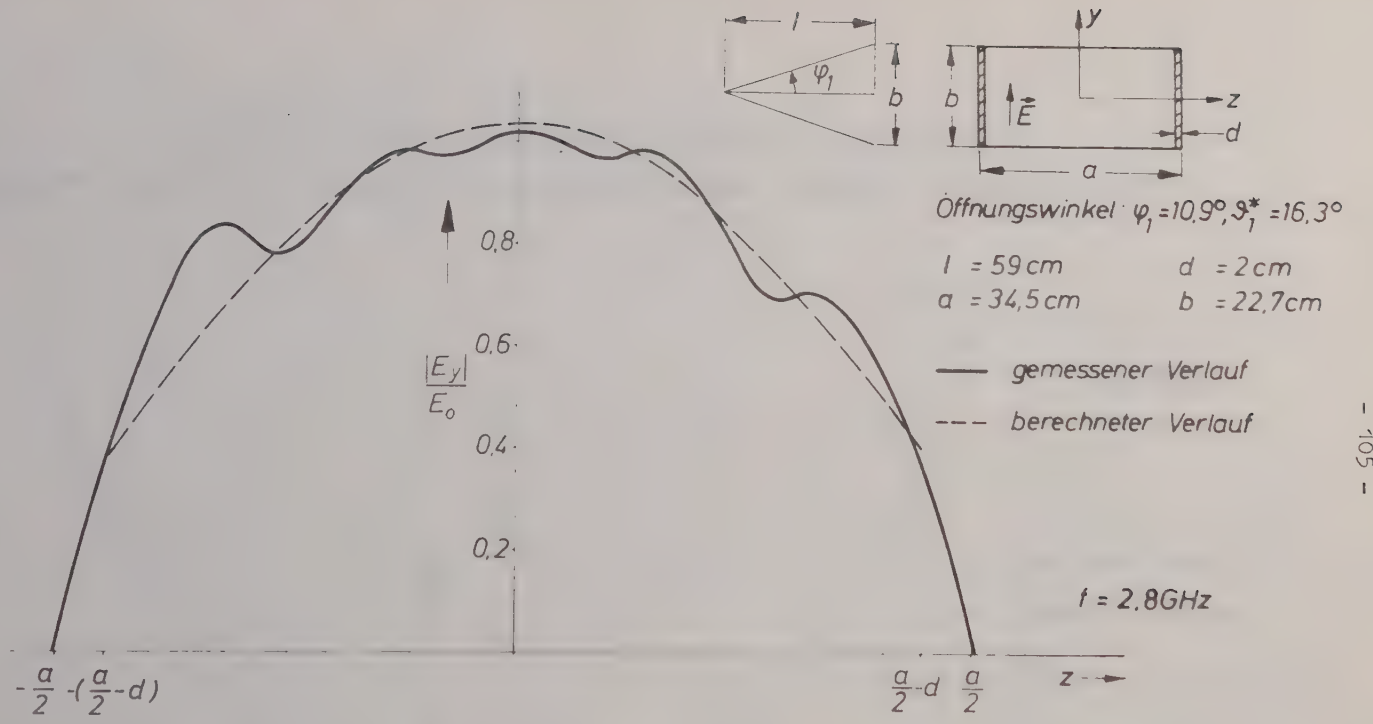


Bild 5.15 Verlauf des elektrischen Feldes in der Öffnung eines Pyramidenhorns mit zwei induktiven Wänden in der H-Ebene

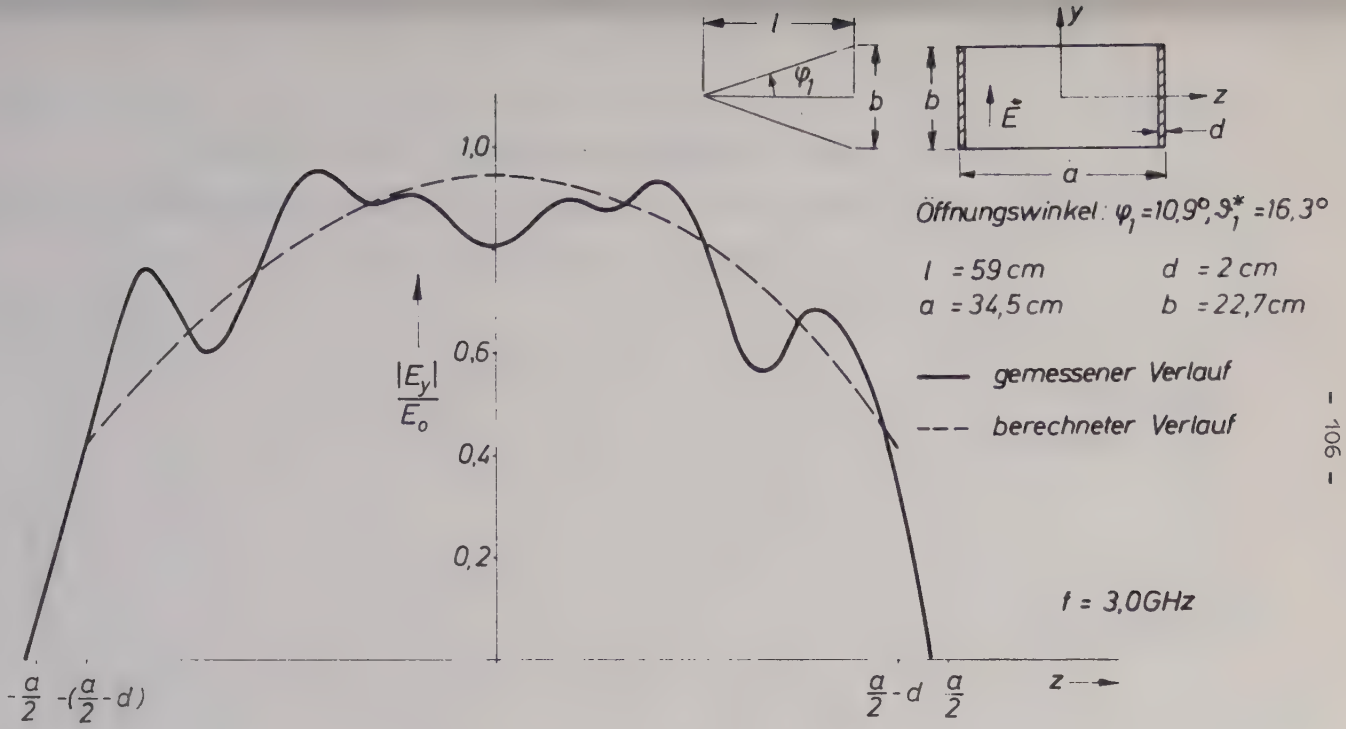


Bild 5.16 Verlauf des elektrischen Feldes in der Öffnung eines Pyramidenhorns mit zwei induktiven Wänden in der H-Ebene

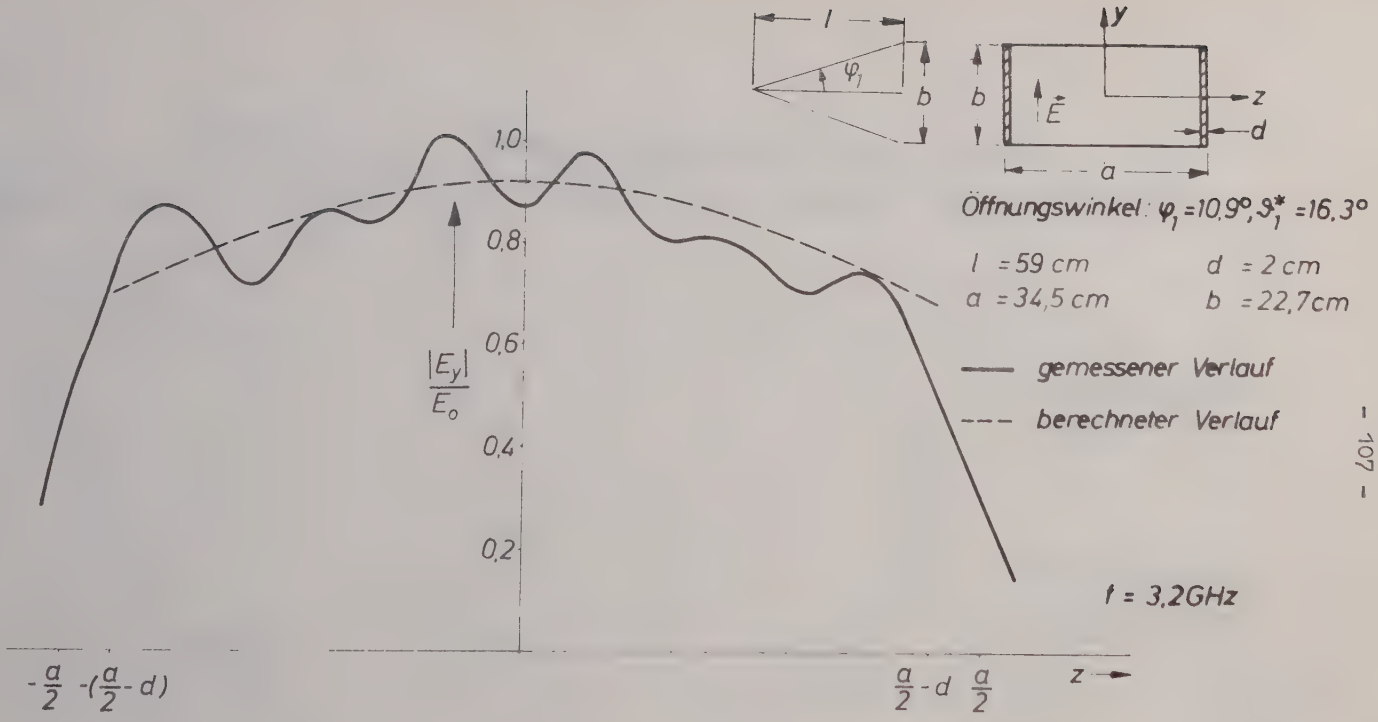


Bild 5.17 Verlauf des elektrischen Feldes in der Öffnung eines Pyramidenhorns mit zwei induktiven Wänden in der H-Ebene

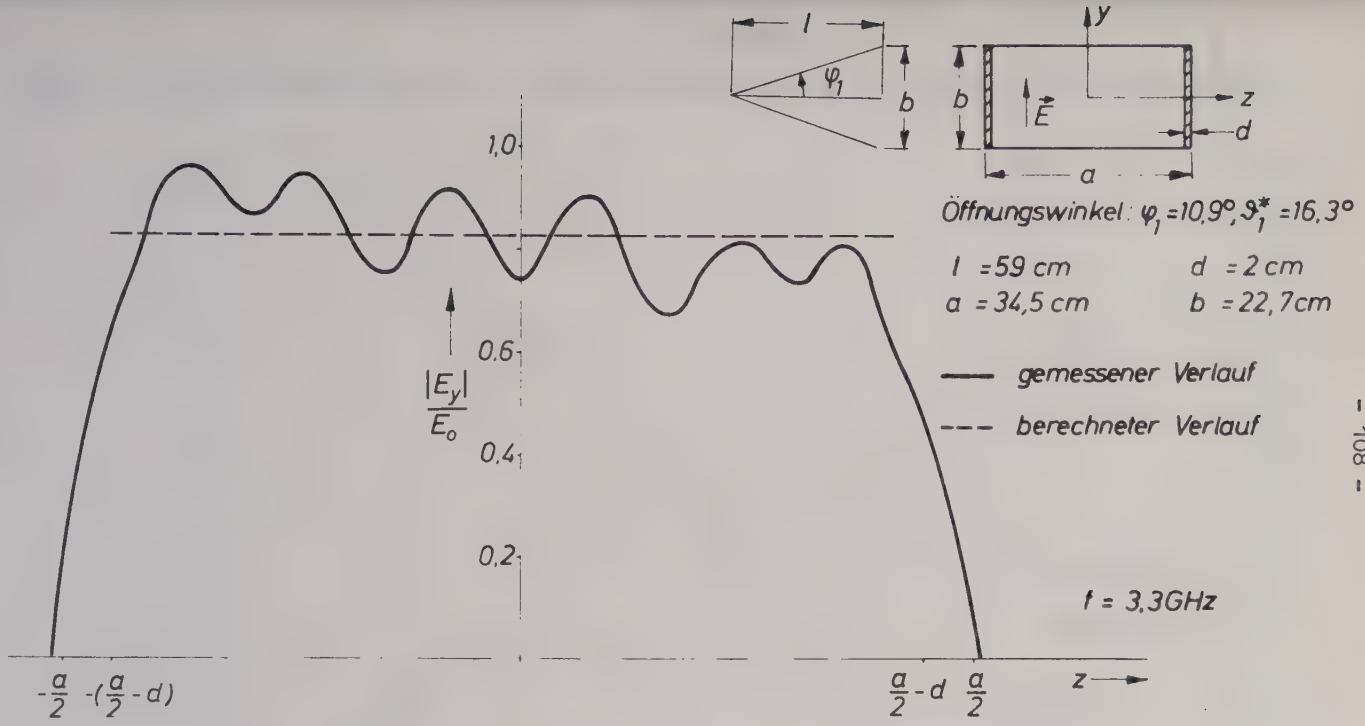


Bild 5.18 Verlauf des elektrischen Feldes in der Öffnung eines Pyramidenhorns mit zwei induktiven Wänden in der H-Ebene

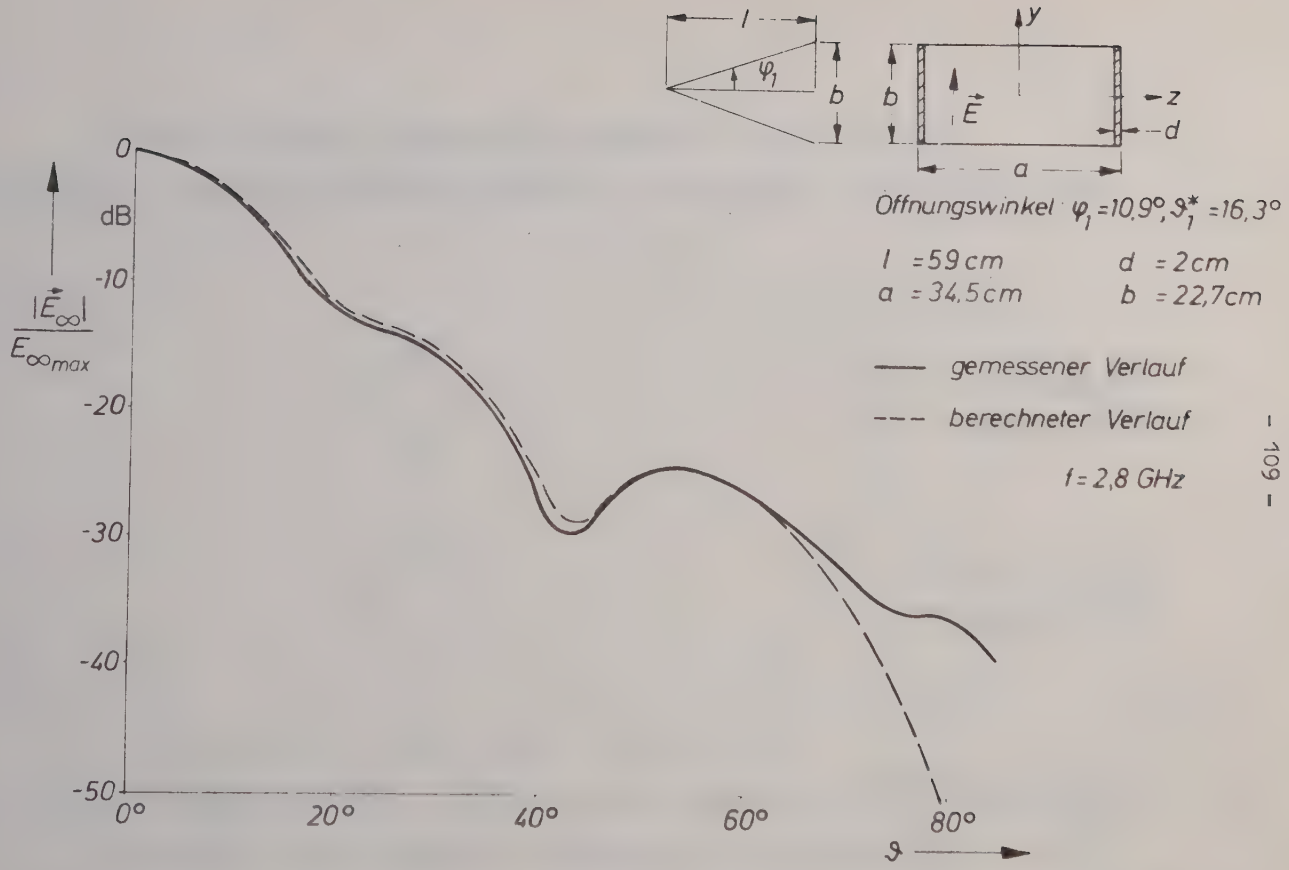


Bild 5.20 Richtdiagramm eines Pyramidenhorns mit zwei induktiven Wänden in der H-Ebene

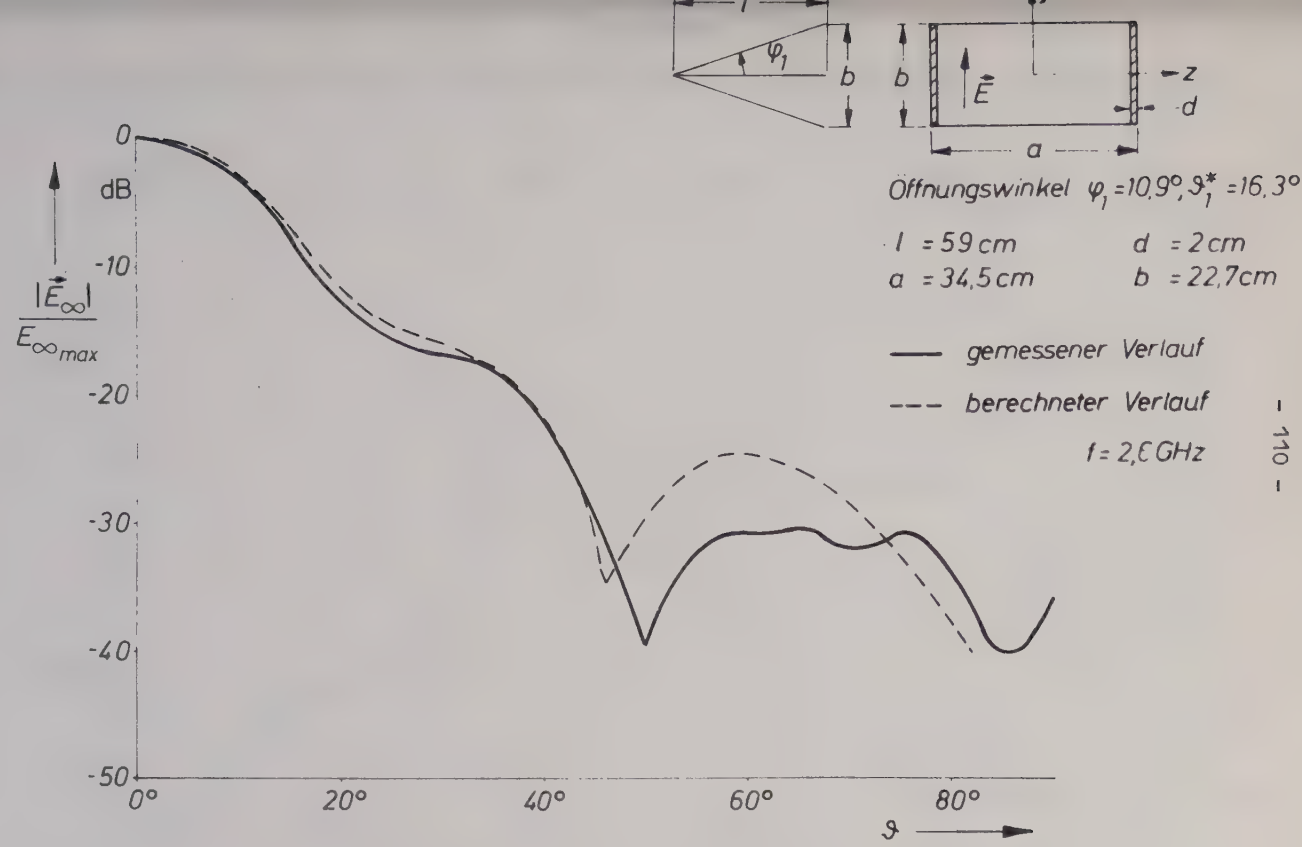


Bild 5.19 Richtdiagramm eines Pyramidenhorns mit zwei induktiven Wänden in der H-Ebene

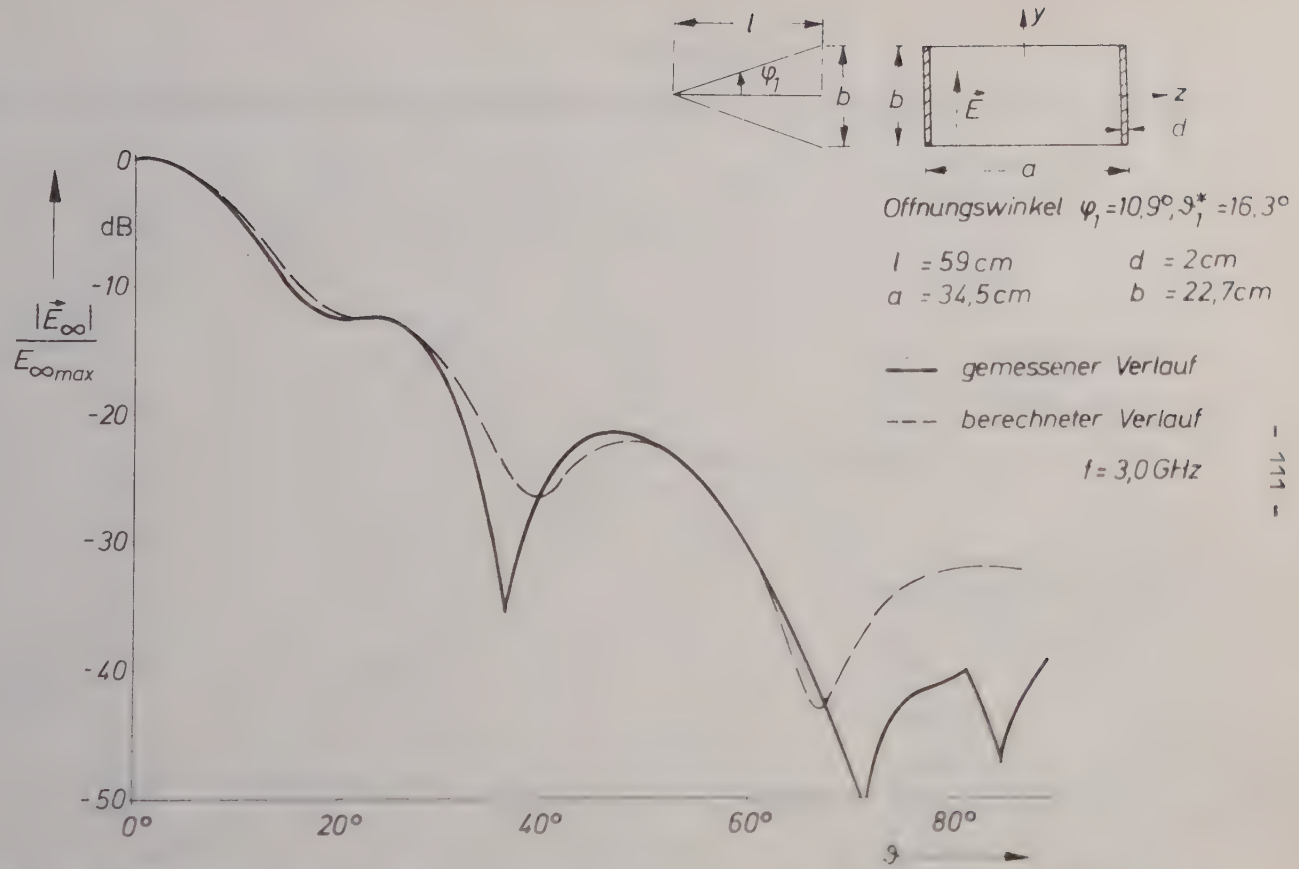


Bild 5.21 Richtdiagramm eines Pyramidenhorns mit zwei induktiven Wanden in der H-Ebene

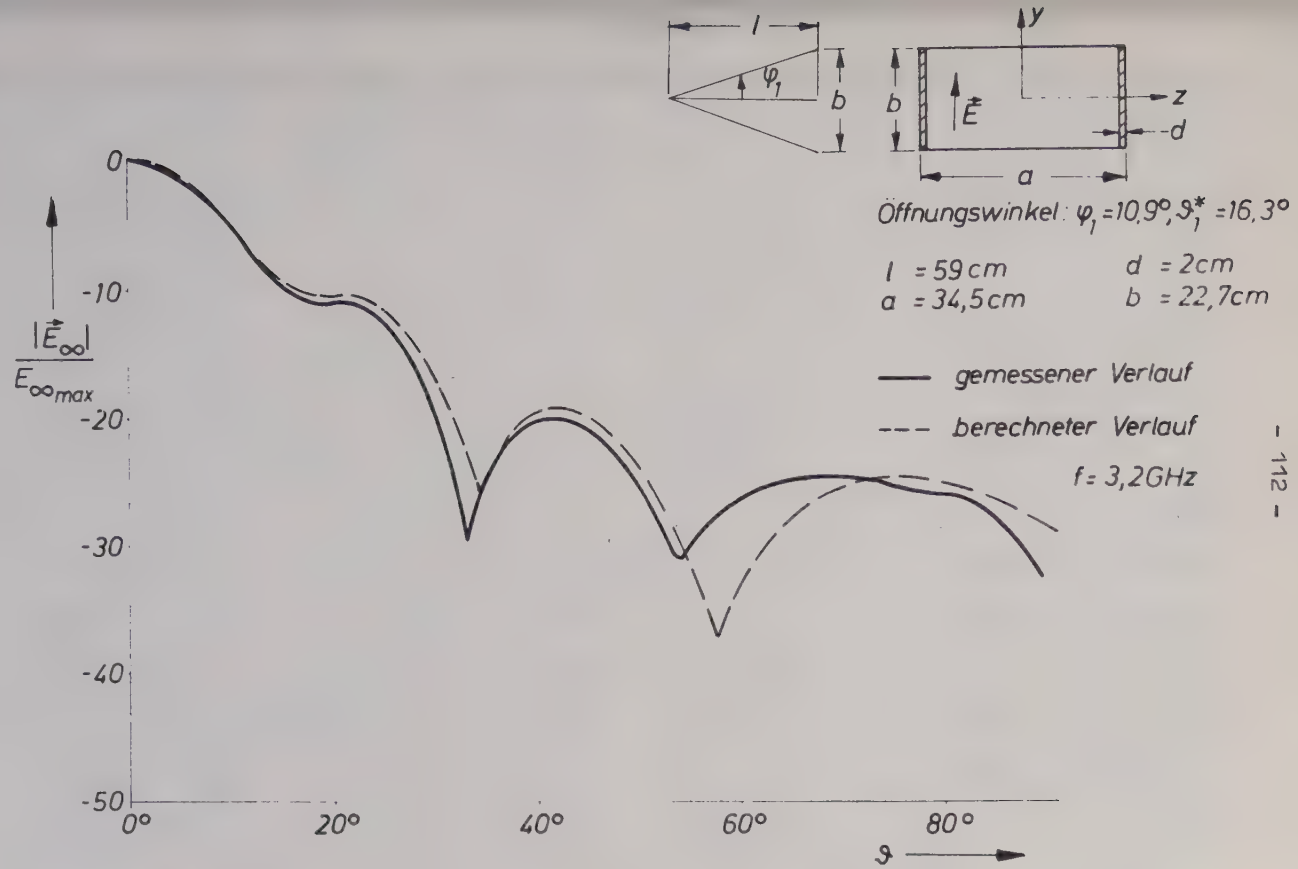


Bild 5.22 Richtdiagramm eines Pyramidenhorns mit zwei induktiven Wänden in der H-Ebene

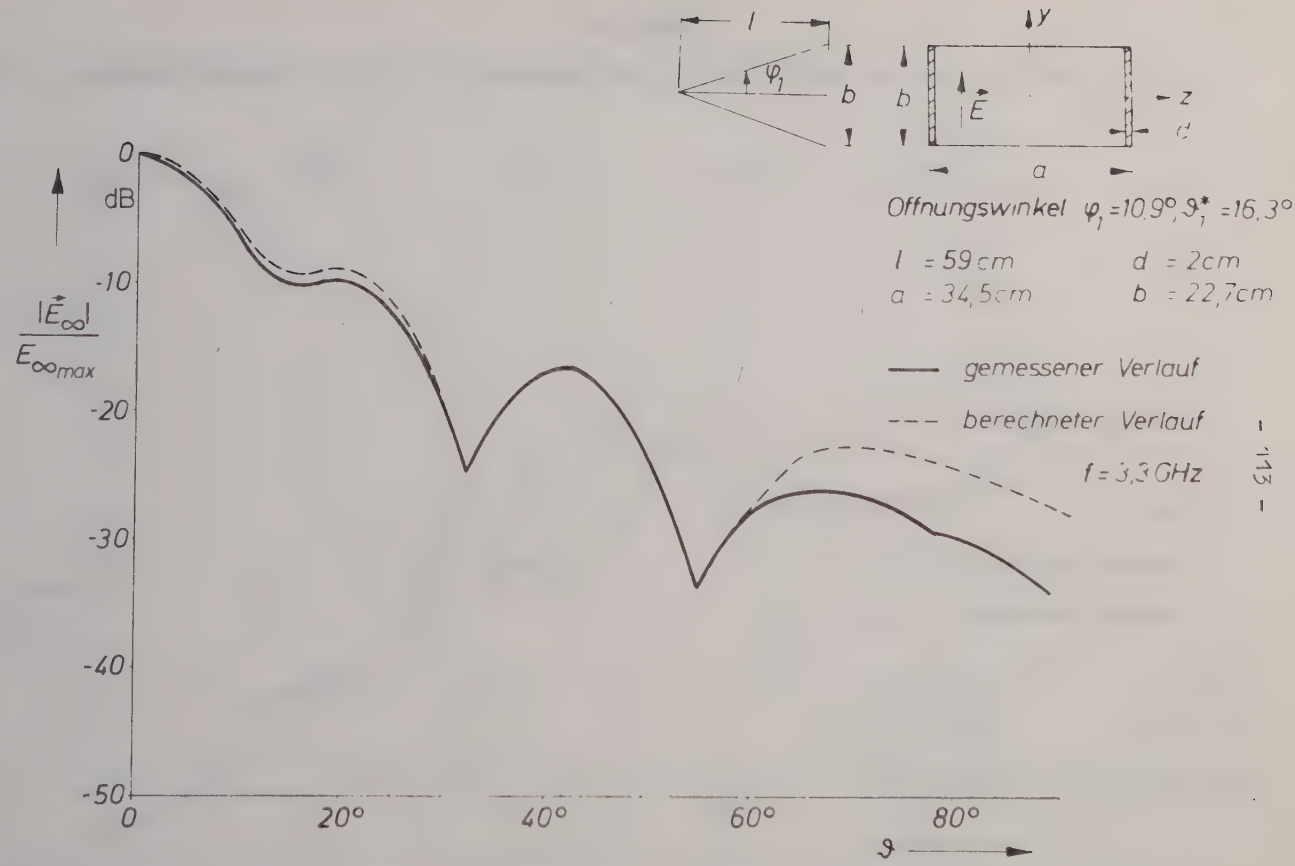


Bild 5.23 Richtdiagramm eines Pyramidenhorns mit zwei induktiven Wänden in der H-Ebene

In den Nahfeldmessungen war festgestellt worden, daß der Verlauf von $|E_y|$ nicht völlig symmetrisch zur y-Achse ist. Diese Abweichung von der Symmetrie macht sich im Fernfeld dadurch bemerkbar, daß die Hauptstrahlrichtung um bis zu maximal 2° von der Antennenachse abweicht. Die Feldstärkeminima sind im Bereich $-180^\circ \leq \vartheta^* \leq 0^\circ$ weniger stark ausgeprägt als im Bereich $0^\circ \leq \vartheta^* \leq +180^\circ$, während sich die Nebenmaxima für positive ϑ^* von den entsprechenden für negative ϑ^* in der Höhe nur wenig (max. 0,5 dB) unterscheiden.

6. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das elektromagnetische Feld in trichterförmigen Wellenleitungen mit vollkommen leitenden Wänden und in kugelsektorförmigen Wellenleitungen mit Wänden bestimmter Oberflächenimpedanz sowie das Strahlungsverhalten entsprechender Hornstrahler untersucht.

Die Berechnung des Feldes in der jeweiligen Wellenleitung erfordert die Lösung des betreffenden Randwertproblems. Es wird gezeigt, daß in vielen Fällen die Felder nicht in Produktform darstellbar sind. Die Lösung der Randwertaufgabe erfolgt deshalb mit Hilfe des Differenzenverfahrens. Die Berechnung der Richtcharakteristik der Hornstrahler wird nach der Aperturfeldmethode unter der Annahme durchgeführt, daß in der Apertur der Hornstrahler nur die Hauptwelle vorhanden ist und daß der Einfluß der Ströme auf der Außenwand vernachlässigt werden kann.

Aus der Gruppe der Hornstrahler mit vollkommen leitenden Wänden werden zwei praktisch wichtige Fälle behandelt. Erstens wird das Feld der Hauptwelle einer pyramidenförmigen Wellenleitung bestimmt. Der Vergleich der Ergebnisse mit den Feldern, wie sie mit den bisher in der Literatur angegebenen Näherungsverfahren ermittelt werden, zeigt, daß diese nur für kleine Öffnungswinkel gültig sind. Zusätzlich wird ein neues einfaches Näherungsverfahren angegeben, mit dem das Feld in der pyramidenförmigen

Wellenleitung auch bei großen Öffnungswinkeln genau angegeben werden kann. Zweitens wird für einen Hornstrahler mit vollkommen leitenden Wänden eine Berandungsform bestimmt, bei der das E- und H-Diagramm für zwei senkrecht aufeinander stehende Polarisationsrichtungen des Feldes in der Apertur nahezu gleich sind. Die Antenne ist deshalb für Zirkularpolarisation geeignet.

Für die andere Gruppe von Hornstrahlern, nämlich für Kugelsektorhörner mit Wänden bestimmter Oberflächenimpedanz, werden wiederum zwei Beispiele diskutiert. Zunächst wird die Wandimpedanz eines Kugelsektorhorns für Zirkularpolarisation so bestimmt, daß die Antenne einen hohen Flächenwirkungsgrad besitzt. Im zweiten Beispiel werden Kugelsektorhörner mit transversalen Riefen ("corrugated horn") untersucht. Dabei zeigt sich, daß die bisher in der Literatur angegebene Feldverteilung für die Hauptwelle nur unter bestimmten Bedingungen gilt.

Inwieweit die der Rechnung zugrunde gelegten Annahmen zulässig sind, wird experimentell geprüft. Dazu wird das Feld in der Öffnung eines Pyramidenhorns mit vollkommen leitenden Wänden sowie des gleichen Horns mit zwei induktiven Wänden nach dem Streukörperverfahren gemessen. Durch geeignete konstruktive Maßnahmen gelingt es, überwiegend die Hauptwelle anzuregen. Der Vergleich von gemessenen und berechneten Richtdiagrammen zeigt, daß der Einfluß der verbliebenen höheren Wellen und der Ströme auf der Außenwand des Hornes auf die Form der Hauptkeule und Lage und Höhe der ersten beiden Nebenmaxima vernachlässigt werden kann.

7. Anhang

7.1 Realisierung von ebenen Wänden bestimmter Impedanz

7.1.1 Isotroper Fall

Trifft eine ebene homogene Welle unter dem Winkel α auf eine unendlich ausgedehnte, ebene, vollkommen leitende Platte, die mit einem verlustfreien Material (ε_r, μ_r) der Dicke d beschichtet ist, (Bild 7.1) dann erhält man für die Quotienten der in der

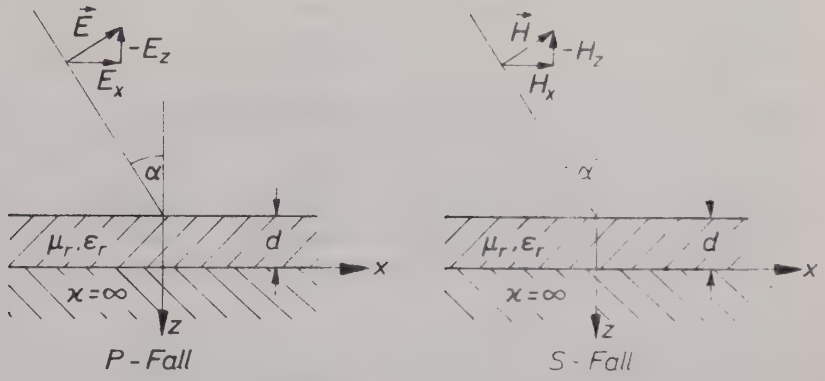


Bild 7.1

Ebene z = -d liegenden E- und H-Komponenten [49]

$$\frac{E_x}{H_y Z_o} = j \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_r \mu_r}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_o} d \sqrt{\varepsilon_r \mu_r - \sin^2\alpha}\right) , \qquad (7.1)$$

wenn $\vec{E}$ in der Einfallsebene (P-Fall)

$$\frac{E_y}{H_x Z_o} = - j \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_r \mu_r}}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_o} d \sqrt{\mu_r \varepsilon_r - \sin^2\alpha}\right) , \qquad (7.2)$$

wenn $\vec{E}$ senkrecht zur Einfallsebene (S-Fall) liegt.

Analog zu den Gln. (2.43) - (2.46) lassen sich in der Ebene $z = -d$ Wandimpedanzen Z_p und Z_s durch die Gleichungen

$$Z_p = \frac{E_x}{H_y}$$

und

$$Z_s = -\frac{E_y}{H_x}$$

definieren, die nach Gln. (7.1) und (7.2) isotrop sind.

Im folgenden soll an einem speziellen Beispiel untersucht werden, inwieweit sich das Wandimpedanzkonzept auf Hohlleitungen mit beschichteten Wänden übertragen läßt und unter welchen Bedingungen das Problem mit Hilfe der Wandimpedanzen nach Gln. (7.1) und (7.2) gelöst werden kann. Dazu wird eine Wellenleitung, deren Übertragungseigenschaften durch Erfüllen der Stetigkeitsbedingungen sowohl exakt als auch mit dem Wandimpedanzkonzept näherungsweise berechnet werden können, herangezogen, nämlich eine Rechteckhohlleitung mit zwei beschichteten Wänden (Bild 7.2).

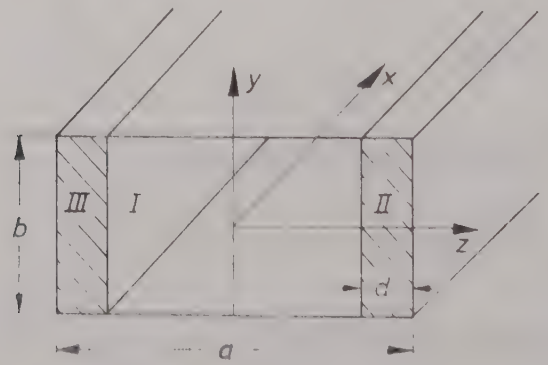


Bild 7.2

Wie schon in Abschnitt 4.3 erwähnt wurde, sind die bei der exakten Berechnung sich ergebenden Eigenwellen Längsschnittwellen [30].

Die Hauptwelle (LSH_z-Welle) besitzt nur die Komponenten E_y, H_z und H_x, die in dem hier interessierenden Bereich I durch

$$\begin{aligned} E_y &= E_o \cos(k_z z) e^{-jk_x x} \\ H_z &= E_o \frac{k_x}{\omega\mu\mu_r} \cos(k_z z) e^{-jk_x x} \\ H_x &= E_o \frac{j}{\omega\mu_o\mu_r} \sin(k_z z) e^{-jk_x x} \end{aligned} \qquad (7.3)$$

beschrieben werden. Dabei gilt mit $k_o = \frac{2\pi}{\lambda_o}$

$$k_z^2 + k_x^2 = k_o^2 \,. \qquad (7.4)$$

Der Wert von k_z bestimmt sich aus der charakteristischen Gleichung

$$\frac{\cot k_z d}{k_z} = \frac{\tan\left[\sqrt{k_o^2(\epsilon_r\mu_r - 1) + k_z^2}\left(\frac{a}{2} - d\right)\right]}{\sqrt{k_o^2(\epsilon_r\mu_r - 1) + k_z^2}} \,, \qquad (7.5)$$

kann also reelle oder imaginäre Werte annehmen. Im Fall reeller k_z läßt sich das Feld in der Hohlleitung durch die Überlagerung zweier ebener homogener Wellen beschreiben. Wenn die Betriebsfrequenz f genügend weit oberhalb der Grenzfrequenz f_c liegt, dann weicht die Ausbreitungsrichtung dieser ebenen Wellen nur wenig von der x-Richtung ab, die Wellen treffen also unter einem sehr flachen Winkel auf die Grenzschicht. Für die Berechnung der Hauptwelle nach dem Wandimpedanzkonzept wird daher für $f \gg f_c$ Gl. (7.2) mit $\alpha = 90^o$ verwendet:

$$\frac{Z_s}{Z_o} = \frac{j}{\sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon_r\mu_r}}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_o} d \sqrt{\epsilon_r\mu_r - 1}\right) . \qquad (7.6)$$

Um den Gültigkeitsbereich dieser Gleichung in einem konkreten Fall zu bestimmen, wurde k_z für die Hauptwelle einer Rechteck-

hohlleitung mit den Abmessungen (a-2d) = 34,5 cm und b = 22,7 cm[1] für f = 3 GHz sowohl mit Gl. (7.5) als auch mit Hilfe des Wandimpedanzkonzeptes berechnet. Die Dicke der dielektrischen Schicht ($\mu_r = 1$) an den beiden Schmalseiten der Hohlleitung wurde im Bereich

$$0 \leq d \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r - 1}} \frac{\lambda_o}{4} \tag{7.7}$$

verändert, so daß die Wandimpedanz Z_s nach Gl. (7.6) im Bereich

$$0 \leq Z_s \leq + j \infty$$

variierte. Es ergab sich, daß der Fehler der Näherung im gesamten Bereich unter 1 % liegt.

7.1.2 Anisotroper Fall

Bild 7.3 zeigt eine Struktur, die dadurch entsteht, daß in eine vollkommen leitend angenommene Metallplatte parallele Riefen eingefräst werden. Dabei sollen die Stege dünn gegen die Breite der Riefen sein, also

$$t_1 \gg t_2 \,. \tag{7.8}$$

Ferner soll die Riefenbreite sehr klein gegen die Wellenlänge sein, d.h.

$$t_1 \ll \lambda_o \,. \tag{7.9}$$

---

1) Die Abmessungen wurden so gewählt, daß die Querschnittsfläche in etwa gleich der Öffnungsfläche des in den Abschnitten 4.3 und 5.2 diskutierten Kugelsektorhornes ist.

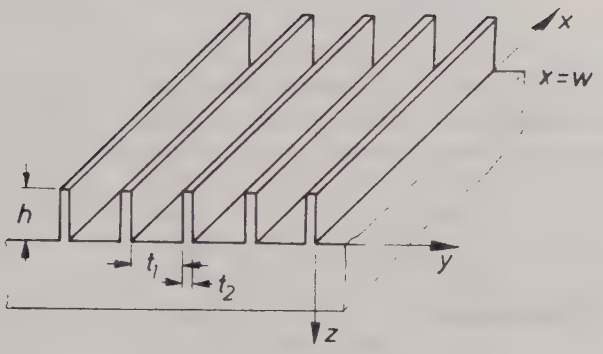


Bild 7.3

Wenn die Struktur bei x = 0 und x = w durch vollkommen leitende Flächen begrenzt ist, sind zwischen den einzelnen Stegen nur H_{mo}-Wellen in z-Richtung ausbreitungsfähig. Am Beispiel einer Rechteckhohlleitung, bei der die eine Breitseite eine Oberflächenstruktur wie in Bild 7.3 hat, während die anderen eben sind, ergibt sich, daß bei Einhaltung von Gln. (7.8) und (7.9) die Amplituden der zwischen den Stegen nicht ausbreitungsfähigen Wellen gegenüber denen der ausbreitungsfähigen Wellentypen vernachlässigt werden können [50]. Bei der Anregung von nur einer H_{mo}-Welle durch ein Feld im Bereich $z < -h$ läßt sich daher in der Ebene $z = -h$ eine Wandimpedanz Z_{yx} durch die Gleichung

$$Z_{yx} = -\frac{E_y}{H_x} = jZ_o \frac{\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_o}\sqrt{1-\left(\frac{m\lambda_o}{2w}\right)^2}\,h\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{m\lambda_o}{2w}\right)^2}} \qquad (7.10)$$

angeben. Für den Fall, daß

$$2w \gg m\lambda_o \,, \qquad (7.11)$$

also $f \gg f_c$ ist, vereinfacht sich Gl. (7.10) zu

$$Z_{yx} = jZ_o \tan\left(\frac{2\pi}{\lambda_o} h\right) . \qquad (7.12)$$

Dasselbe Ergebnis wurde kürzlich in einer Untersuchung gefunden, in der mit Hilfe der Momentenmethode der Oberflächenstrom in einem schmalen Schlitz berechnet wird, wenn dieser durch eine zu

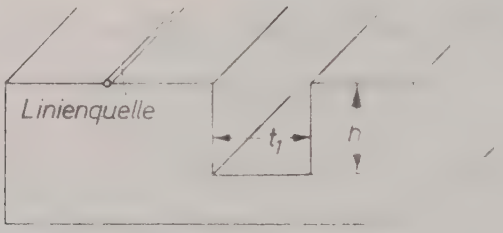


Bild 7.4

ihm parallele Linienquelle (Bild 7.4) angeregt wird [51].

Die Wandimpedanz Z_{xy} ist bei der angenommenen vollkommenen Leitfähigkeit

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y} = 0 .$$

Wegen der unterschiedlichen Werte von Z_{xy} und Z_{yx} ist die Oberflächenimpedanz einer Metallplatte mit parallelen Riefen anisotrop.

7.2 Verzeichnis häufig verwendeter Formelzeichen

a	Hohlleitungsbreite
b	Hohlleitungshöhe
C_E	Amplitude des elektrischen Hertzschen Vektors
C_H	Amplitude des magnetischen Hertzschen Vektors
d	Schichtdicke des dielektrischen Wandbelages
$\vec{E}$	Vektor des elektrischen Feldes
E_r, E_ϑ, E_φ	Komponenten des elektrischen Feldes in Kugel-Koordinaten
E_x, E_y, E_z	Komponenten des elektrischen Feldes in kartesischen Koordinaten
$\vec{E}_o$	Amplitude der Hauptwelle
$E_\infty (\vartheta,\varphi)$	Richtcharakteristik
F	Integrationsfläche
F_A	Aperturfläche
F_H	Öffnungsfläche des Hornes
f	Frequenz
$f_{E,H}(\varphi,\vartheta)$	Verlauf des elektrischen oder magnetischen Potentials in einer Kugelsektorfläche
G	Gewinn
$g_{E,H}(r)$	Verlauf des elektrischen oder magnetischen Potential in Abhängigkeit vom Radius
$\vec{H}$	Vektor des magnetischen Feldes
H_r, H_ϑ, H_φ	Komponenten des magnetischen Feldes in Kugelkoordinaten
H_x, H_y, H_z	Komponenten des magnetischen Feldes in kartesischen Koordinaten
h_φ, h_ϑ	Abstände der Netzlinien in φ- und ϑ-Richtung
$H_\nu^{(1),(2)}(x)$	Hankelfunktion 1. und 2. Art ν-ter Ordnung
$J_\nu(x)$	Besselfunktion ν-ter Ordnung
$k = 2\pi/\lambda$	Wellenzahl
k_c	Grenzwellenzahl
l	Hornlänge
l_s	Streukörperlänge
l_w	Länge eines Stückes einer trichterförmigen Wellenleitung

m,n	Indizes zur Kennzeichnung eines Wellentyps
$\vec{n}$	Flächennormale
p	Separationskonstante
$P_\nu^q(\cos\vartheta), Q_\nu^q(\cos\vartheta)$	zugeordnete Legendresche Funktionen erster und zweiter Art der Ordnung q und des Grades ν
q	Separationskonstante
q_F	Flächenwirkungsgrad
r_o	Kantenlänge eines Stückes einer trichterförmigen Wellenleitung
$\vec{u}$	Einheitsvektor
$x_{\varphi r}, x_{r\varphi}, x_{\vartheta r}, x_{r\vartheta}$	auf den Wellenwiderstand Z bezogene Wandimpedanzen
Z	Wellenwiderstand
Z_o	Wellenwiderstand des leeren Raumes
$Z_{\varphi r}, Z_{r\varphi}, Z_{\vartheta r}, Z_{r\vartheta}$	Wandimpedanzen
α	Parameter zur Charakterisierung der Berandungsform
ϵ_o	absolute Dielektrizitätskonstante des leeren Raumes
ϵ_r	relative Dielektrizitätszahl
ϑ_1^*	Öffnungswinkel
Λ	Eigenwert
λ	Wellenlänge
λ_o	Freifeldwellenlänge
μ_o	absolute Permeabilität des leeren Raumes
μ_r	relative Permeabilität
$\nu_{E,H}$	Separationskonstante
$\Pi_{E,H}$	Radiale Komponente des elektrischen und magnetischen Hertzsche Vektors
φ_1	Öffnungswinkel
Ω	Modulationsfrequenz
ω	Sendefrequenz

7.3 Literaturangaben

[1] Severin, H., Zur Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen. Z.f.Physik 129(1951), S. 426

[2] Kühn, R., Mikrowellenantennen, Berlin 1964, S. 263

[3] Abramowitz, M. und Stegun, J.A.,Handbook of Mathematical Functions. Washington 1966, S. 364

[4] Schelkunoff, S.A., The Impedance Concept and its Application to Problems of Reflection, Refraction, Shielding and Power Absorption. Bell System Techn. Journ. 17(1938), S. 17

[5] Barlow, M.M. and Brown, J., Radio Surface Waves. Oxford 1962

[6] Collatz, L., Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig 1963, S. 354

[7] Smith, C.D., Numerische Lösungen von partiellen Differentialgleichungen. Braunschweig 1970, S. 181

[8] Sauer, R. und Szabó, J., Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs. Teil II, Berlin Heidelberg New York 1969, S. 569

[9] Sauer, R. und Szabó, J., a.a. O., S. 556

[10] Young, D.M., Iterative Methods for Solving Partial Difference Equations of Elliptic Type. Trans. AmMath.Soc. 76(1954), S. 92

[11] Householder, A.S. und Bauer, F.L., On Certain Methods for expanding the characteristic Polynomial. Numer.Math. 1(1959), S. 29

[12] Francis, J.G.F., The QR Transformation. Comp.Journal 4(1961), S. 265 - 271

[13] Carré, B.A., The Determination of the Optimum Acceleration Factor for Successive Overrelaxation. Comp.Journal 4(1961), S. 73

[14] Forsythe, G.F. und Wasow, W.R., Finite Difference Methods for Partial Differential Equations. New York 1967, S. 375

[15] Beaubien, M.J. und Wexler, A., An Accurate Finite-Difference Method for Higher Order Waveguide Modes. IEEE MTT-16(1968), S. 1007

[16] Fox, L., Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations. Oxford 1962, S. 301

[17] Unger, H.G., Elektromagnetische Wellen I. Braunschweig 1967, S. 226

[18] Janke-Emde-Lösch, Tafeln höherer Funktionen. Stuttgart 1960, S. 115

[19] Narasimhan, M.S., Eigenvalues of a Class of Spherical Wave Functions. IEEE AP-21(1973), S. 8

[20] Schelkunoff, S.A. und Friis, H.T., Antennas Theory and Practice. New York London 1952, S. 526

[21] Braun, E.H., Some Data for the Design of Electromagnetic Horns. IRE AP-4(1956), S. 29

[22] Piefke, G., Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Pyramidentrichter. Z.angew.Physik VI(1954), S. 499

[23] Koch, G.F., Fortschritte in Theorie und Technik von Hornstrahlern und Spiegelantennen. NTZ(1973), S. 354 - 360

[24] Rupp, A. und Schlaud, A., Probleme der Zirkularpolarisation bei Radarantennen. NTF 23(1961), S. 99 - 106

[25] Koch, G.F., Flächenstrahler mit kleinen Nebenmaxima. FTZ(1954), S. 498 - 504

[26] Koch, G.F., Richtantennen mit besonderen Aperturformen. NTZ 10(1957), S. 175 - 186

[27] Love, A.W., The Diagonal Horn Antenna. Microwave Jornal (1962), S. 117 - 122

[28] Dybdal, R.B. et al., Rectangular Waveguide with Impedance Walls. IEEE MTT-19(1971), S. 2 - 9

[29] McIsaac, P.R., Comments on "Rectangular Waveguide with Impedance Walls". IEEE MTT-22(1974), S. 972

[30] Gardiol, F.E., Higher-Order Modes in Dielectrically Loaded Rectangular Waveguides. IEEE MTT-16(1968), S. 919 - 924

[31] Clarricoats, P.J.B. und Saha, P.K., Propagation and Radiation Behaviour of Corrugated Feeds. Proc. IEE, Vol. 118 Nr. 9(1971), S. 1167 - 1186

[32] Bryant, G.H. Propagation in Corrugated Waveguides. Proc. IEE Vol. 116 Nr. 2(1969), S. 203 - 213

[33] Manwarren, T. und Farrar, A., Pattern Shaping with Hybrid Mode Corrugated Horns. IEEE AP-22(1974), S. 484 - 487

[34] Davies, D., Corrugations Improve Monopulse Feed Horns. Microwaves, April(1972), S. 58 - 63

[35] Buchmeyer, S.K., Corrugations Lock Horns with Poor Beamshapes. Microwaves, Jan.(1973), S. 44 - 49

[36] Baldwin, R., Horn Feeds for Parabolic Reflectors of Elliptical Cross-Section. European Microwave Conference Brussels, Belgium 1973

[37] Justice, R. und Rumsey, V.H., Measurement of Electric Field Distribution. IRE AP-2(1955), S. 177 - 180

[38] Richmond, J.H., A Modulated Scattering Technique for Measurement of Field Distribution. IRE AP-2(1955), S. 13 - 15

[39] Hu, M.K., On Measurements of Microwave E and H-Field Distribution by Using Modulated Scattering Methods. IRE AP-7(1960), S. 295 - 300

[40] Cullen, A.L. und Parr, J.C., A New Pertubation Method for Measuring Microwave Fields in Free Space. Proc. IEE 102 B (1955), S. 836 - 844

[41] King, R.J., An Amplitude and Phase Measuring System Using a Small Modulated Scatterer. Microwave Journal Vol. 8. März (1965), S. 51, 94 - 98

[42] Neumann, E.G. und Severin, H., Echofreie Flächenabsorber für Mikrowellen. Jahrbuch der Ruhr-Universität Bochum 1970, S. 51

[43] Harrington, R.F., Small Resonant Scatterers and Their Use for Field Measurements. IRE MTT-10(1962), S. 165 - 174

[44] Megla, G., Dezimeterwellentechnik. Stuttgart 1962, S. 778

[45] Loos, O., Aperturfelder von Hornstrahlern. Techn.Bericht d. FTZ, A 44 Tbr. 6. Dez. 1967

[46] Koch, G.F. und Dombek, K.P., Einfluß der Aperturreflexion auf die Berechnung der Richtcharakteristik von Hohlleitern. AEÜ 11(1969), S. 553 - 560

[47] Dombek, K.P., Über den Näherungscharakter Kirchhoffscher Randwerte für Nahfeldberechnungen. NTZ 26(1973), S. 165 - 170

[48] Tsandoulas, G.N. und Fitzgerald, W.D., Apertur Efficiency Enhancement in Dielectrically Loaded Horns. IEEE AP-20 (1972), S. 69 - 74

[49] Walther, K., Polarisation und Winkelabhängigkeit des Reflexionsfaktors von Absorbern für elektromagnetische Zentimeterwellen. Zeitschr.f.angew.Phys. X. Band(1958), S. 285 - 295

[50] Elliot, R.S., On the Theory of Corrugated Plane Surfaces. IRE AP-1(1954), S. 71 - 81

[51] Mentzer, C.A. und Peters, L., A Parametric Study of Cut-off Corrugated Surface Properties. Nasa Report Nr. CR 2317, October 1973

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1971 bis 1974 am Institut für Hoch- und Höchstfrequenztechnik der Ruhr-Universität Bochum. Herrn Prof. Dr. Hans Severin bin ich für die Förderung der Arbeit und viele wertvolle Anregungen und Hinweise zu Dank verpflichtet.

L e b e n s l a u f

1944	geboren am 3. Juni in Esgrusschauby, Krs. Flensburg
April 1950 bis März 1954	Volksschule in Esgrusschauby, Krs. Flensburg
April 1954 bis März 1963	Neusprachliches und Mathematisch-Naturwissenschaftliches Gymnasium in Kappeln/Schlei
8. Februar 1963	Abitur
April bis September 1963	Industriepraktikum
WS 1963/64 bis SS 1969	Studium der Elektrotechnik, Fachrichtung Theoretische Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Darmstadt
10. Juli 1969	Diplomhauptprüfung
Seit dem 1. August 1969	Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Hoch- und Höchstfrequenztechnik der Ruhr-Universität Bochum (Prof. Dr. Hans Severin)

Bamberger Fotodruck
GmbH & Co. KG.
Schadel & Wehle
86 Bamberg · Hohe-Kreuz-Str. 9b · Telefon: 0951/21617